

PROGRAMA COMPUTACIONAL DESTINADO À IDENTIFICAÇÃO MODAL DE ESTRUTURAS CIVIS SUBETIDAS AS EXCITAÇÕES AMBIENTES A PARTIR, SOMENTE, DAS RESPOSTAS MEDIDAS NOS ENSAIOS DE VIBRAÇÃO

S. D. R. Amador^{1*}, R. M. De Souza²

1: Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil (PPGEC)
Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada a Engenharia
Universidade Federal do Pará - UFPA
Prédio do Centro Tecnológico, Sala 232
Rua Augusto Côrrea, 01 CEP 66075-110, Belém, PA, Brasil
e-mail: diord@ufpa.br web: <http://www.ufpa.br/nicae>

2: Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada a Engenharia
Universidade Federal do Pará - UFPA
Prédio do Centro Tecnológico, Sala 232
Rua Augusto Côrrea, 01 CEP 66075-110, Belém, PA, Brasil
e-mail: remo@ufpa.br <http://www.ufpa.br/nicae>

Palavras-chave: Identificação Modal, Vibrações em Estruturas, Identificação por Subespaços Estocásticos, Identificação de Estruturas Civis, Análise Dinâmica.

Resumo. *Este artigo descreve um programa computacional destinado à identificação modal de estruturas civis a partir, somente, das respostas medidas nos ensaios experimentais de vibração utilizando os métodos de identificação modal dos subespaços estocásticos (SSI-DATA) e (SSI-COV). Trata-se de um programa com uma GUI (Graphical User Interface) desenvolvido na plataforma do Matlab®. O programa é composto de três módulos: o primeiro é destinado ao pré-processamento dos sinais de respostas coletados nos ensaios de vibração; o segundo é usado para incluir as informações do posicionamento dos transdutores de aceleração (acelerômetros) nos arquivos pré-processados no primeiro módulo; e o terceiro módulo é constituído das ferramentas de identificação propriamente ditas, onde os sinais processados nos dois primeiros módulos são identificados com auxílio de um diagrama de estabilidade a partir do qual se pode identificar as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os respectivos modos de vibração. O programa computacional foi utilizado na identificação de uma de uma ponte metálica treliçada e seus parâmetros modais foram determinados satisfatoriamente numa faixa de frequência de 0 a 5 Hz.*

1. INTRODUÇÃO

Neste artigo é apresentado um programa computacional destinado à identificação modal experimental de estruturas civis submetidas a excitações ambientes utilizando os métodos **SSI-COV** (*Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification*) e o **SSI-DATA** (*Data-Driven Stochastic Subspace Identification*) [1]. Apesar de já existirem outros programas comerciais destinados à identificação modal através da teoria de subespaços estocásticos como, por exemplo, o MACEC [2] e o Artemis [3], optou-se, neste trabalho, por criar um novo programa com o mesmo propósito, que foi desenvolvido na plataforma Matlab®. A decisão de desenvolver um novo programa, ao invés de utilizar de um programa comercial já existente, se explica pela facilidade de adequar os equipamentos utilizados nos ensaios de vibração de estruturas civis existentes no Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia (NICAÉ/UFPA). Um outro aspecto que justifica essa decisão é o fato desse novo programa ser aberto, o que flexibiliza as suas aplicações e também o seu contínuo aperfeiçoamento pela equipe do NICAÉ.

Embora tanto o método **SSI-DATA** como o **SSI-COV** tenham sido implementados no referido programa, é apresentado, a seguir, somente um breve resumo teórico do método **SSI-DATA**, em virtude de este método ter apresentado maior robustez e precisão na identificação de parâmetros de estruturas civis [4]. Como exemplo de aplicação do programa, é apresentado o resultado da identificação modal de uma ponte em estrutura metálica.

2. MODELOS ESTOCÁSTICOS EM ESPAÇO DOS ESTADOS

A identificação modal experimental a partir somente das respostas é possível através dos modelos estocásticos em espaços dos estados discretos no tempo. Nesses modelos tanto as excitações como também as perturbações presentes no sistema dinâmico são representadas por variáveis estocásticas, resultando no modelo puramente estocástico em espaço dos estados discreto no tempo, que é descrito pelas seguintes equações [1]:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_d x_k + w_k \\ y_k &= C_d x_k + v_k\end{aligned}\tag{1}$$

onde $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C_d \in \mathbb{R}^{l \times n}$ são, respectivamente, as matrizes de estado e saída para os modelos em espaço dos estados discretos no tempo com dimensões n e l , respectivamente iguais a duas vezes o número de graus de liberdade da estrutura e ao número de sensores utilizados nos ensaios de vibração. Os vetores $x_k \in \mathbb{R}^n$ e $y_k \in \mathbb{R}^l$ são as matrizes de *estado* e *resposta discretas*, respectivamente. Como as excitações são desconhecidas, é impossível distinguir-las das perturbações e, em virtude dessa dificuldade, tanto as excitações como as perturbações decorrentes de ruído são descritas pela variável estocástica $w_k \in \mathbb{R}^n$. As excitações e as imprecisões nas medições são descritas pela variável $v_k \in \mathbb{R}^l$ na segunda equação de estado (1). Além das matrizes A_d e C_d , o sistema estocástico de equações (1) é ainda descrito pelas matrizes de covariância expressas a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(y_k y_k^T\right) &= R_0 \\ \mathbf{E}\left(x_{k+1} y_k^T\right) &= G \end{aligned} \quad (2)$$

onde operador $\mathbf{E}(\bullet)$ corresponde ao valor esperado, R_0 e G são, respectivamente, a matriz de covariância das respostas y_k e a matriz de covariância entre o *próximo vetor de estado* x_{k+1} e o vetor de resposta y_k .

3. IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA A PARTIR SOMENTE DAS RESPOSTAS UTILIZANDO O MÉTODO SSI-DATA

Utilizando o conceito dos sensores de referência, as respostas são organizadas apropriadamente visando à identificação através dos modelos em espaço dos estados. Considerando $y_k \in \mathbb{R}^l$ um vetor que possui as l respostas de todos os sensores utilizados em um ensaio de vibração no instante $t = k\Delta t$ ($k \in \mathbb{N}$), se devem escolher apropriadamente os sensores de referência $y_k^{ref} \in \mathbb{R}^r$ de tal sorte que:

$$y_k^{ref} = L_s y_k, \quad (3)$$

onde $L_s \in \mathbb{R}^{r \times l}$ é uma matriz composta de vários zeros e alguns uns, convenientemente dispostos nas linhas e colunas, visando selecionar os sensores de referência. Rearranjando a matriz de respostas de todos os sensores y_k de tal sorte que os r sensores de referência y_k^{ref} ocupem as primeiras linha, têm-se:

$$y_k = \begin{pmatrix} y_k^{ref} \\ y_k^{\sim ref} \end{pmatrix} \quad (4)$$

onde $y_k^{\sim ref} \in \mathbb{R}^{l-r}$ é o vetor de resposta dos sensores remanescentes obtido pela exclusão das respostas de referências do vetor de todas as respostas y_k . Um outro procedimento importante para o desenvolvimento teórico dos métodos de identificação modal por subespaços estocásticos é a organização das respostas y_k em uma matriz de *Hankel*.

$$H^{ref} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} y_0^{ref} & y_1^{ref} & \dots & y_{N-1}^{ref} \\ y_1^{ref} & y_2^{ref} & \dots & y_N^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1}^{ref} & y_i^{ref} & \dots & y_{i+N-2}^{ref} \\ y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+N-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \dots & y_{2i+N-2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_f \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow ri \\ \Downarrow li \end{matrix} \begin{matrix} \text{"passado"} \\ \text{"futuro"} \end{matrix} \quad (5)$$

onde a matriz $H^{ref} \in \mathbb{R}^{(r+l)ixN}$ é a matriz *Hankel* multiplicada por um fator de escala de $1/\sqrt{N}$, com N igual ao número de colunas dessa matriz. É conveniente dividir a *Hankel* em duas submatrizes $Y_p^{ref} \in \mathbb{R}^{rixN}$ e $Y_f \in \mathbb{R}^{lixN}$ que correspondem, respectivamente, à matriz das respostas de referência passadas e à matriz das respostas futuras. É conveniente ainda para os métodos de identificação de sistemas dinâmicos em espaço dos estados que a matriz *Hankel* seja também particionada conforme as equações a seguir [2]:

$$H^{ref} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref+} \\ Y_{ii}^{-ref} \\ Y_f^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r(i+1) \\ \Downarrow l-r \\ \Downarrow l(i-1) \end{matrix}, \quad H^{ref} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_{ii} \\ Y_f^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow ri \\ \Downarrow l \\ \Downarrow l(i-1) \end{matrix} \quad (6)$$

onde $Y_p^{ref+} \in \mathbb{R}^{r(i+1) \times N}$, $Y_{ii}^{-ref} \in \mathbb{R}^{r(l-r) \times N}$, $Y_f^- \in \mathbb{R}^{r(l-r) \times N}$ e $Y_{ii} \in \mathbb{R}^{l \times N}$ são submatrizes da matriz de *Hankel*. Com a utilização de técnicas numéricas robustas como a Decomposição em Valores Singulares (**DVS**), a fatoração **QR** e a estimação por mínimos quadrados [5], aliadas ao conceito de filtro Kalman da teoria de controle [6][1], o método **SSI-DATA** é capaz de identificar modelos estocásticos em espaço dos estados a partir somente das respostas obtidas nos ensaios de vibração. Na identificação a partir somente das respostas o método **SSI-DATA** utiliza a projeção dos espaços das linhas dos dados das respostas futuras Y_f sobre o espaço das linhas das respostas de referência passadas Y_p^{ref} . Esta projeção é definida a seguir, como:

$$\mathfrak{P}_i^{ref} \equiv Y_f / Y_p^{ref} \equiv Y_f \left(Y_p^{ref} \right)^T \left(Y_p^{ref} \left(Y_p^{ref} \right)^T \right)^\dagger Y_p^{ref} \quad (7)$$

onde as matrizes $Y_f \in \mathbb{R}^{lixN}$ e $Y_p^{ref} \in \mathbb{R}^{rixN}$ são sub-matrizes da matriz de *Hankel* H^{ref} definida na equação (5). Uma outra definição importante para o método **SSI-DATA** é a do

filtro Kalman [4][6]. Através deste filtro pode-se estimar o vetor de estado \hat{x}_k a partir das respostas y_k observadas até o instante $k-1$ quando as matrizes A_d, G, C_d e R_0 que descrevem os modelos estocásticos em espaço dos estados são conhecidas. Assumindo que o estado inicial seja $\hat{x}(0) = 0$, os vetores de estado \hat{x}_k são estimados através do filtro Kalman, utilizando a seguinte fórmula recursiva.

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= A_d \hat{x}_{k-1} + K_k (y_{k-1} - C_d \hat{x}_{k-1}) \\ K_{k-1} &= (G - A_d P_{k-1} C_d^T) (R_0 - C_d P_{k-1} C_d^T)^{-1} \\ P_k &= A_d P_{k-1} A_d^T + (G - A_d P_{k-1} C_d^T) (R_0 - A_d P_{k-1} C_d^T)^{-1} (G - A_d P_{k-1} C_d^T)^T\end{aligned}\quad (8)$$

onde $P_0 \equiv E[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T] = 0$ é a covariância do vetor de estado inicial estimado, $P_k = E[\hat{x}_k \hat{x}_k^T]$ é a covariância do k -ésimo vetor de estado, e K é o ganho do filtro Kalman. Uma vez estimados os vetores de estado \hat{x}_k , eles são então convenientemente armazenados formando uma matriz de *estados estimados* \hat{X}_i que apresenta a seguinte forma:

$$\hat{X}_i \equiv (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \cdots \quad \hat{x}_{i+N-1}) \quad (9)$$

De acordo com [4], a projeção \mathfrak{P}_i pode ser decomposta no produto da matriz de *observabilidade* O_i pela matriz de estados estimados \hat{X}_i da equação (9).

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_i^{ref} &= \begin{pmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ C_d A_d^2 \\ \cdots \\ C_d A_d^{i-1} \end{pmatrix} (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \cdots \quad \hat{x}_{i+j-1}) \Downarrow \quad n = O_i \hat{X}_i \\ &\leftrightarrow \\ &n\end{aligned}\quad (10)$$

O posto da matriz de projeção \mathfrak{P}_i é determinado com a **DVS** expressa pela equação:

$$\mathfrak{P}_i^{ref} = USV^T = (U_1 \quad U_2) \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (11)$$

onde $U \in \mathbb{R}^{lixli}$ e $V \in \mathbb{R}^{rixri}$ são matrizes ortonormais, e $S \in (\mathbb{R}^+)^{lixli}$ é uma matriz diagonal que contém os valores singulares em ordem decrescente. $U_1 \in \mathbb{R}^{lixn}$, $S_1 \in \left[\mathbb{R}_0^+ \right]^{n \times n}$

e $V_1 \in \mathbb{R}^{N \times n}$. Na ultima igualdade da equação (11) a **DVS** é calculada em função das matrizes $U_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $S_1 \in (\mathbb{R}^+)^{n \times n}$ e $V_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, considerando somente os valores singulares não nulos que é igual ao posto da matriz de projeção \mathfrak{P}_i^{ref} . A matriz de *observabilidade* O_i e a matriz de *estados estimados* do filtro Kalman \hat{X}_i podem também ser calculadas em função de U_1 , S_1 , V_1 , de acordo com as equações [1].

$$\begin{aligned} O_i &= U_1 S_1^{1/2} \\ \hat{X}_i &= O_i^\dagger \mathfrak{P}_i^{ref} \end{aligned} \quad (12)$$

Para calcular as matrizes que descrevem o sistema dinâmico estocástico é necessário ainda definir uma outra matriz de projeção que é calculada em função das matrizes de respostas futuras e passadas obtidas a partir da matriz de *Hankel*, de acordo com a equação.

$$\mathfrak{P}_{i-1}^{ref} = Y_f^- / Y_p^{ref+} = O_{i-1} \hat{X}_{i+1} \quad (13)$$

onde \hat{X}_{i+1} é a matriz dos *próximos estados estimados* e O_{i-1} é uma outra matriz de *observabilidade* que é obtida suprimindo-se as ultimas l linhas da matriz de *observabilidade* O_i . Em notação do Matlab®, pode-se escrever [1]:

$$O_{i-1} = O_i(1 : l(i-1), :) \quad (14)$$

Reescrevendo a equação (13), a matriz dos próximos estados estimados \hat{X}_{i+1} pode ser calculada da seguinte forma:

$$\hat{X}_{i+1} = O_{i-1}^\dagger \mathfrak{P}_{i-1}^{ref} \quad (15)$$

Uma vez estimada a matriz de *estados* \hat{X}_i a partir das respostas, as matrizes de estados x_k e x_{k+1} , as respostas y_k , e as perturbações v_k e w_k podem ser substituídas, respectivamente, por \hat{X}_i , \hat{X}_{i+1} , $Y_{i|i}$, V_i e W_i na equação (1) que é, então, reescrita como:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_d \\ C_d \end{pmatrix} \hat{X}_i + \begin{pmatrix} W_i \\ V_i \end{pmatrix} \quad (16)$$

onde $V_i \in \mathbb{R}^{2n \times N}$ e $W_i \in \mathbb{R}^{l \times N}$ são considerados resíduos sem nenhuma correlação com as matrizes $Y_{i|i}$ e \hat{X}_{i+1} . Admitindo essa hipótese, as matrizes de entrada A_d e de saída C_d do sistema estocástico de equações (16) são obtidas por meio de mínimos quadrados.

$$\begin{pmatrix} A_d \\ C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} \hat{X}_i^\dagger \quad (17)$$

Os resíduos V_i e W_i podem ser então calculados isolando-se a parcela correspondente a eles na equação (16).

$$\begin{pmatrix} W_i \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_d \\ C_d \end{pmatrix} \hat{X}_i \quad (18)$$

As matrizes de covariância de ruído Q , R e S são calculadas a partir dos resíduos de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_i \\ V_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_i^T & V_i^T \end{pmatrix} \quad (19)$$

Uma vez determinadas as matrizes de covariância dos resíduos e as matrizes A_d e C_d , as matrizes G e R_0 podem então ser calculadas. O primeiro passo para tanto consiste em resolver a equação de Lyapunov [1], mostrada a seguir, para a matriz Σ .

$$\Sigma = A_d \Sigma A_d^T + Q \quad (20)$$

O passo seguinte consiste em determinar as matrizes G e R_0 , propriamente ditas, de acordo com as equações.

$$\begin{aligned} R_0 &= C_d \Sigma C_d^T + R \\ G &= A_d \Sigma C_d^T + S \end{aligned} \quad (21)$$

1. Implementação do método SSI-DATA/ref

A implementação computacional do método SSI-DATA/ref começa pela fatoração da matriz de *Hankel* da equação (6). De acordo com [4], utilizando a fatoração **QR** essa matriz pode ser decomposta em um produto de duas matrizes R e Q , tal que:

$$\left(H^{ref} \right)^T = QR \Leftrightarrow H^{ref} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_{i|i}^{ref} \\ Y_f^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref+} \\ Y_{i|i}^{-ref} \\ Y_f^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_{i|i} \\ Y_f^- \end{pmatrix} = (QR)^T = R^T Q^T \quad (22)$$

A fatoração **QR** consiste em decompor uma matriz na forma de um produto de uma matriz Q por uma outra R , de tal sorte que R seja uma matriz diagonal superior e Q seja uma matriz cujas colunas formam uma base ortogonal para as colunas da matriz original [6].

$$H^{ref} = \begin{array}{cccc} & ri & r & l-r & l(i-1) & N \\ & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ \begin{array}{l} ri \\ r \\ l-r \\ l(i-1) \end{array} & \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} & \begin{bmatrix} R_{11}^T & 0 & 0 & 0 \\ R_{12}^T & R_{22}^T & 0 & 0 \\ R_{13}^T & R_{23}^T & R_{33}^T & 0 \\ R_{14}^T & R_{24}^T & R_{34}^T & R_{44}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \\ \updownarrow \end{array} & \begin{array}{l} ri \\ r \\ l-r \\ l(i-1) \end{array} \end{array} \quad (23)$$

As projeções \mathfrak{P}_i^{ref} e \mathfrak{P}_{i-1}^{ref} podem ser calculadas em função das submatrizes das matrizes de Q e de R , como mostrado a seguir.

$$\mathfrak{P}_i^{ref} = \begin{pmatrix} R_{12}^T \\ R_{13}^T \\ R_{14}^T \end{pmatrix} Q_1^T, \quad \mathfrak{P}_{i-1}^{ref} = \begin{pmatrix} R_{14}^T & R_{24}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \quad (24)$$

A matriz $Y_{i|i}$ da equação (6) também pode ser determinada a partir das submatrizes de R e Q , de acordo com [2]:

$$Y_{i|i} = \begin{pmatrix} R_{12}^T & R_{22}^T & 0 \\ R_{13}^T & R_{23}^T & R_{33}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \quad (25)$$

Embora as equações (24) e (25) tenham sido expressas em função das submatrizes de R e Q , observa-se, entretanto, que devido as suas características de ortonormalidade as submatrizes de Q são canceladas quando as equações (24) e (25) são inseridas nas equações (17). Procedendo-se desta forma, a equação (17) pode ser reescrita como.

$$\begin{pmatrix} A_d \\ C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{i-1}^\dagger R_{14}^T \\ R_{12}^T \\ R_{13}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{12}^T \\ R_{13}^T \\ R_{14}^T \end{pmatrix}^\dagger O_i \quad (26)$$

De acordo com [2], a matriz *Hankel* pode ser substituída pela matriz R sem que haja perda de precisão significativa no processo de identificação de parâmetros. Assim a matriz de projeção \mathfrak{P}_i^{ref} das equações (24) também pode se calculada somente em função das submatrizes R [7].

$$\mathfrak{R}_i^{ref} = \begin{pmatrix} R_{12}^T \\ R_{13}^T \\ R_{14}^T \end{pmatrix} \quad (27)$$

Vários algoritmos para identificação de modelos estocásticos em espaço dos estados através do método **SSI-DATA** podem ser encontrados na literatura [2][4]. A diferença entre eles está na maneira pela qual a matriz de projeção expressa pela equação (27) é ponderada antes da **DVS**. Um desses algoritmos é conhecido como *Canonical Variate Analysis (CVA)* e consiste em ponderar a equação (27) utilizando o termo $(Y_f Y_f^T)^{-1/2}$ como peso, dando origem a seguinte equação:

$$(Y_f Y_f^T)^{-1/2} \begin{pmatrix} R_{12}^T \\ R_{13}^T \\ R_{14}^T \end{pmatrix} = USV^T \quad (28)$$

Ainda de acordo com esse algoritmo, a matriz de *observabilidade* é calculada através da seguinte expressão [4]:

$$O_i = (Y_f Y_f^T)^{-1/2} U_1 S_1^{1/2} \quad (29)$$

Uma vez determinadas as matrizes A_d e C_d através da equação (26), os autovalores discretos Λ_d e os modos de vibração observados podem ser então calculados de acordo com as equações (30) [2].

$$\begin{aligned} A_d &= \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} \\ \varphi &= C_d \Psi \end{aligned} \quad (30)$$

Uma vez identificadas as matrizes do modelo estocásticos (16) e as formas modais observadas φ , resta somente determinar os demais parâmetros modais. O primeiro passo para tanto consiste em determinar os autovalores contínuos dos modelos em espaço dos estados Λ_c conforme a equação mostrada a seguir [2].

$$\Lambda_c = \left[\lambda_i \right] = \frac{\ln(\Lambda_d)}{\Delta t} \quad (31)$$

Finalmente, após a determinação dos autovalores contínuos Λ_c , as frequências naturais e os respectivos fatores de amortecimento são calculados utilizando as equações (32) [2].

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\omega_i \zeta_i \pm j\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}, \quad \omega_i = |\lambda_i|$$

$$\zeta_i = -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{\omega_i}, \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$
(32)

Para finalizar a identificação do modelo estocástico da equação (16) resta calcular as matrizes G e R_0 através das equações (20) e (21). Com isso os parâmetros modais e as matrizes A_d , C_d , G e R_0 que definem o sistema dinâmico são determinadas.

4. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

O programa é composto de três módulos: o primeiro é destinado ao pré-processamento dos sinais de respostas coletados nos ensaios de vibração; o segundo é usado para incluir as informações do posicionamento dos sensores (acelerômetros) nos arquivos pré-processados no primeiro módulo; e o terceiro módulo é constituído das ferramentas de identificação propriamente ditas onde os sinais processados no segundo módulo são identificados com auxílio de um diagrama de estabilidade a partir do qual é possível identificar as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os respectivos modos de vibração.

3.1 Módulo de Tratamento de Sinais

Na Figura 1 é mostrado o primeiro módulo destinado ao tratamento das séries temporais obtidas como respostas nos ensaios de vibração. A finalidade desse módulo é preparar os sinais para serem submetidos ao processo de identificação. Ele possui uma interface gráfica amigável, criada com recursos do Matlab® (*Graphical User Interface – GUI*), através da qual o usuário pode realizar operações visando reduzir as perturbações e imprecisões existentes nos sinais que possam comprometer ou, até mesmo, inviabilizar a determinação dos parâmetros modais da estrutura. O **GUI** criado para este módulo permite que os arquivos de dados correspondentes a cada um dos arranjos obtidos nos ensaios de vibração sejam abertos e tratados apropriadamente. Uma vez abertos os arquivos de dados dos ensaios, o programa exibe as séries temporais e também auto-espectro correspondente a cada um dos canais. Um outro recurso importante disponibilizado nesse módulo corresponde às ferramentas de edição das séries temporais. Utilizando essas ferramentas é possível, por exemplo, excluir um canal, derivar e integrar os sinais no tempo e ainda multiplicá-los ou dividi-los por um valor escalar.

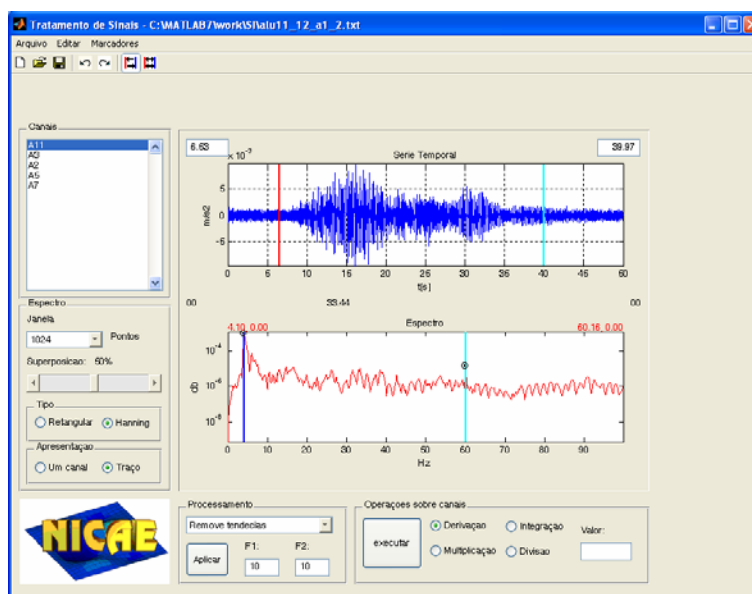


Figura 1. Módulo de tratamento dos sinais.

3.2 Módulo de Posicionamento dos Acelerômetros

A finalidade do módulo de posicionamento dos acelerômetros é introduzir nos arquivos dos sinais de resposta as informações sobre o posicionamento, direção e sentido dos transdutores de aceleração utilizados nos ensaios de vibração. Essas informações são necessárias para viabilizar a identificação da forma modal associadas às frequências naturais que serão posteriormente identificadas no módulo de identificação de parâmetros. Na realidade essas informações definem um modelo em elemento finitos simplificado da estrutura que será utilizado na construção da forma modal da estrutura. A Figura 2 ilustra o procedimento de posicionamento dos acelerômetros ao longo da estrutura no qual são utilizados tanto os arquivos de respostas de todos os canais utilizados no ensaio, como também um arquivo esquemático da estrutura ensaiada.

Após a abertura de ambos os arquivos, basta o usuário do programa selecionar apropriadamente as opções mostradas no lado esquerdo da Figura 2. Após a seleção do canal desejado e também da direção e do sentido dos acelerômetros é necessário, em seguida, selecionar o nó da estrutura no qual o sensor correspondente ao canal anteriormente selecionado foi, de fato, instalado. Para selecionar esse nó, basta aproximar o cursor do *mouse* do nó desejado e, em seguida, pressionar o botão direito e escolher a opção “adicionar acelerômetro”, como mostrado na Figura 2. Seguindo um procedimento semelhante ao anteriormente descrito, pode-se também remover um acelerômetro existente. Finalmente, quando todos os sensores são adicionados á estrutura, o operador do programa pode, então, salvar os sinais processados com as informações dos acelerômetros para que eles possam ser identificados no terceiro módulo do programa.

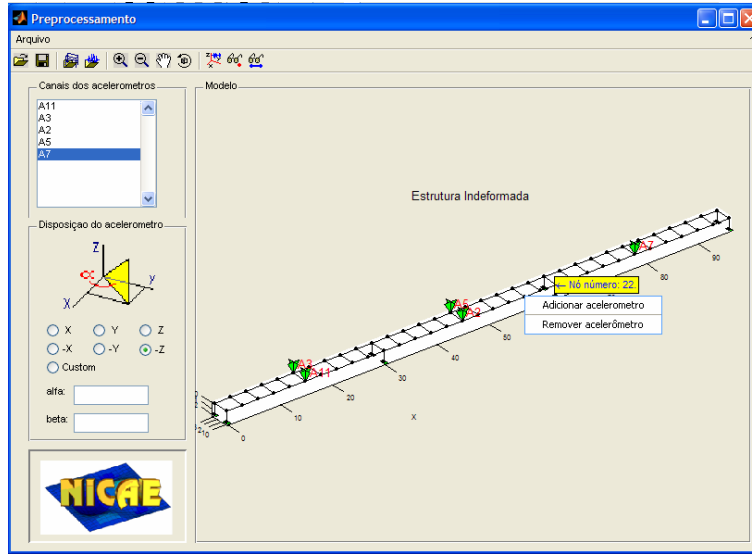


Figura 2. Módulo de posicionamento dos acelerômetros.

3.3 Módulo de Identificação de Parâmetros

Após as etapas de tratamento e processamento realizadas, respectivamente, no primeiro e no segundo módulo, os sinais de resposta tratados são recuperados no módulo de identificação. Este módulo é destinado à determinação dos parâmetros através dos métodos de identificação **SSI-COV** e **SSI-DATA**. Para tanto é necessário definir os sensores de referência, a ordem do modelo e os critérios de estabilidade, que serão utilizados na elaboração de um digrama de estabilidade [2][7][8]. Os critérios de estabilidade utilizados na construção do diagrama são:

$$100\% \frac{f^{(p)} - f^{(p+1)}}{f^{(p)}} < 1\%$$

$$100\% \frac{\zeta^{(p)} - \zeta^{(p+1)}}{\zeta^{(p)}} < 5\% \quad (33)$$

$$100\% [1 - \mathbf{MAC}(p, (p+1))] < 2\%$$

onde p corresponde a ordem do modelo para qual f, ζ e os correspondentes vetores de formas modais observadas $\{\varphi\}$ foram identificados. O Critério de Confiança Modal ou *Modal Assurance Criterion* (**MAC**) [8], como é conhecido, mede a correlação entre dois vetores modais, e é calculado a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{MAC}(p, (p+1)) = \frac{|\varphi^{(p)T} \varphi^{(p+1)T}|^2}{(\varphi^{(p)T} \varphi^{(p)})(\varphi^{(p+1)T} \varphi^{(p+1)})} \quad (34)$$

o resultado da expressão (34) é um escalar que qualifica a relação entre dois vetores. Esse escalar pode assumir valores que variam de zero, indicando nenhuma correção, a um, representando uma correlação consistente. O módulo de identificação disponibiliza critérios de estabilidade que são inicialmente definidos em 1% para as frequências naturais, 2% para os fatores de amortecimento, e 1% para correlação entre os vetores modais. Esses critérios podem ser modificados pelo usuário dependendo da qualidade dos sinais de respostas obtidos nos ensaios de vibração.

Quanto melhor for a qualidade do sinal, mais restritos esses critérios poderão ser considerados. No diagrama de estabilidade mostrado na Figura 3 as frequências são rotuladas de acordo com a seguinte convenção: “ \oplus ” - pólo estável, isto é, quando todos os critérios das equações (33) forem satisfeitos; “ $\bullet v$ ” – pólo com frequência e vetores modais estáveis, ou seja, quando somente o primeiro e o último critério das equações (33) forem satisfeitos; “ $\bullet d$ ” – pólo com amortecimento e frequência estáveis, isto é, quando somente os dois primeiros critérios das equações (33) forem satisfeitos; pólos somente com frequências estáveis “ $\bullet f$ ” quando somente o primeiro critério das equações (33) for satisfeito; e, finalmente, caso o pólo não satisfaça nenhum dos critérios previstos nas equações (33), ele é então rotulado como não estável e é representado no diagrama de estabilidade por “ \bullet ”. Uma vez definidos os critérios de estabilidade e selecionados os canais de referência entre os canais disponíveis, o digrama pode ser traçado ou atualizado a qualquer momento.

Como pode ser observado na Figura 3, o diagrama é traçado sobre o espectro de potência anteriormente estimado no módulo de tratamento de sinais com propósito de facilitar a identificação visual dos parâmetros modais. Com a criação do digrama de estabilidade é, finalmente, possível identificar as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os correspondentes modos de vibração. Para tanto basta mover o cursor do mouse sobre um dos pólos estáveis existentes no diagrama e, então, os respectivos parâmetros são exibidos em uma janela, como ilustrado na Figura 3. Para visualizar as formas modais é necessário marcar os pólos estáveis identificados no diagrama com o símbolo “ \oplus ”. Isso é realizado pressionando o botão esquerdo do mouse e, em seguida, selecionando a opção “adicionar marcador”. Quando o marcador for adicionado ao pólo, será exibido símbolo “ \otimes ” indicando que o pólo estável marcado é um modo de vibração identificado pelo usuário.

Quando todos os pólos identificados forem marcados com “ \otimes ”, então o operador pode visualizar as formas modais pressionando o botão destacado na Figura 4. Após pressionar o referido botão, as formas modais são exibidas, como mostra a Figura 5. Após a identificação de parâmetros, o módulo de identificação permite ainda que o digrama seja gravado em disco em três diferentes formatos: o primeiro deles possui extensão de arquivo (*.STB) que é um tipo de arquivo no qual todos os critérios de estabilidade podem ser armazenados, permitindo que os resultados da identificação possam ser recuperados e analisados em ocasiões futuras; o segundo e o terceiro formato correspondem respectivamente aos formatos (*.BMP) e (*.JPG) que são arquivos de imagens.

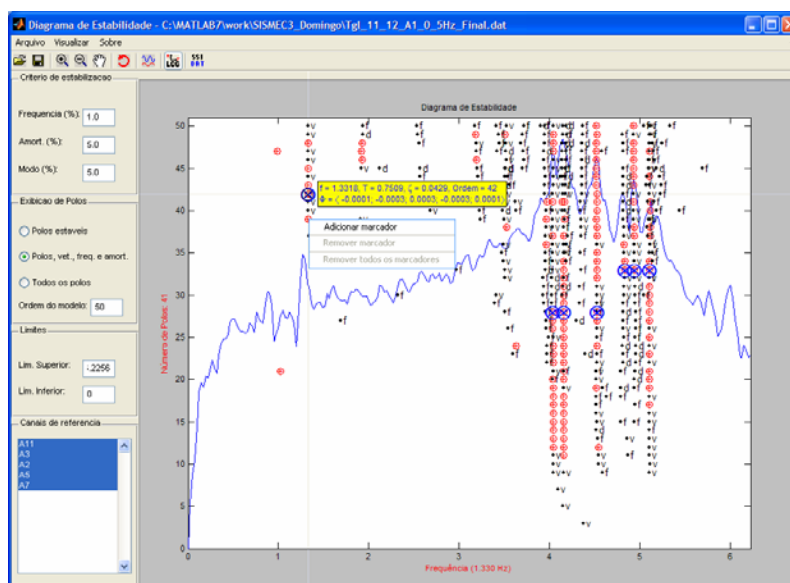


Figura 3. Módulo de Identificação de parâmetros



Figura 4. Botão para visualização das formas modais.

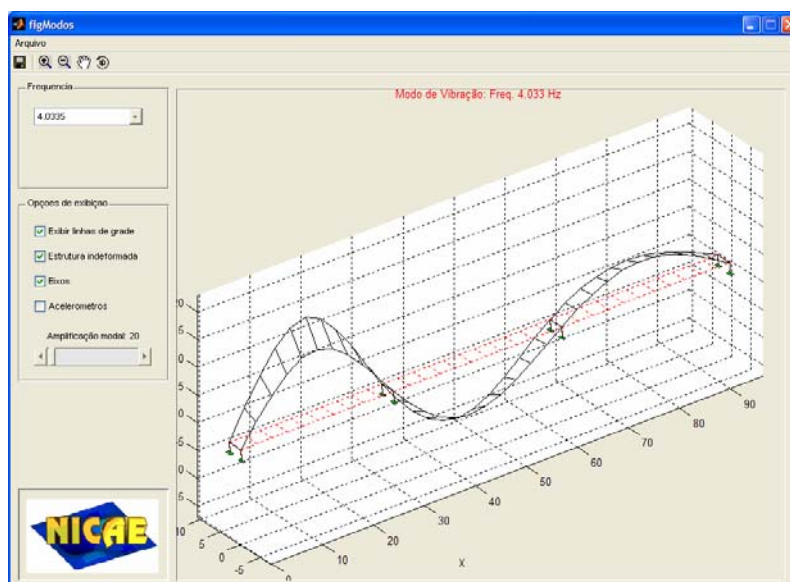


Figura 5. Exibição das formas modais correspondentes aos pólos estáveis marcados no diagrama de estabilidade.

5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplos de aplicação, são mostrados a seguir os resultados obtidos na identificação de parâmetros de uma ponte em estrutura metálica. A referida estrutura localiza-se no porto de Vila do Conde, na cidade de Barcarena, PA, Brasil, sendo utilizada como acesso ao terminal de granéis líquidos (TGL), interligando as instalações retro-portuárias do Porto ao píer do TGL (Figura 6). A ponte é constituída de nove segmentos hiperestáticos de 120,5 metros de comprimento (Figura 7), e um único segmento de 90,5 metros (Figura 8), resultando em uma ponte de 1175 metros de extensão. Todos os segmentos possuem vãos de, aproximadamente, 30 metros de comprimento. Os segmentos são apoiados sob apoios fretados de neoprene que estão fixados nos blocos de concreto que, por sua vez, são apoiados sobre estacas de aço. Em cada segmento, há blocos intermediários com duas estacas, e dois blocos extremos com quatro estacas. A estrutura da ponte é constituída por treliças metálicas e o piso, formado por placas pré-fabricadas de concreto (Figura 9).



(a) Vista lateral do ponto de vista da área retro-portuária



(b) Vista lateral geral do ponto de vista do píer

Figura 6. Fotografia da estrutura.

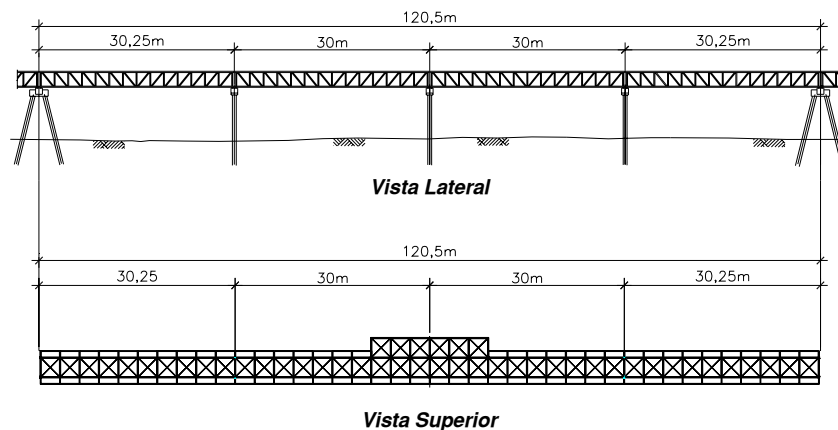


Figura 7. Arranjo típico dos segmentos com quatro vãos, com comprimento total de 120,5 metros.

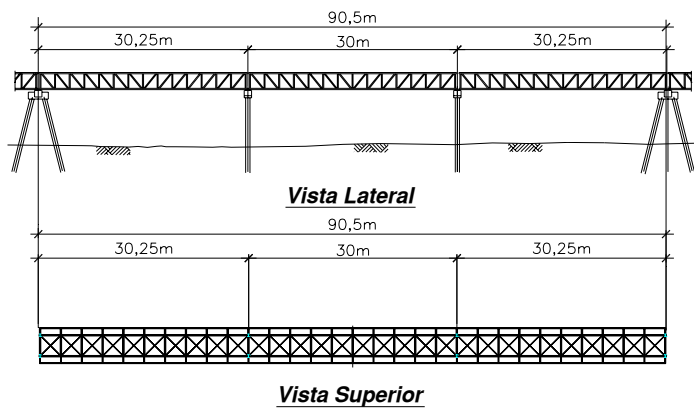


Figura 8. Arranjo do segmento com três vãos, com comprimento total de 90,5 metros.

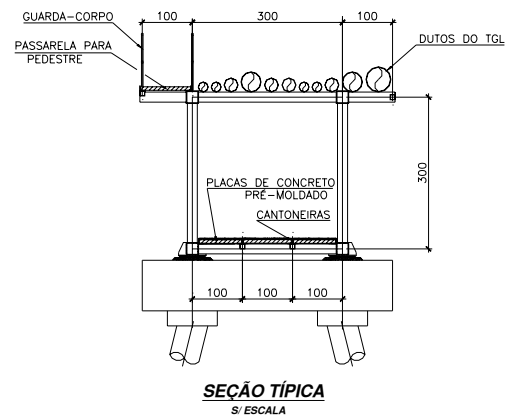


Figura 9. Seção típica da ponte e detalhe do apoio.

Embora os ensaios de vibração tenham sido realizados em quatro dos nove segmentos da ponte, só são apresentados neste artigo os resultados obtidos para o último segmento de 90,5 metros de comprimento. Neste segmento os acelerômetros foram instalados segundo diversos arranjos. Um desses arranjos é mostrado na Figura 10, no qual os cinco acelerômetros utilizados foram dispostos ao longo do segmento de modo a medir as acelerações na direção Z. Como fonte de excitação foi utilizado um veículo movimentando-se ao longo da ponte. As séries temporais obtidas nesse arranjo foram devidamente tratadas no primeiro módulo de tratamento de sinais. Após esse tratamento os sinais apresentaram os aspectos mostrados na Figura 11.

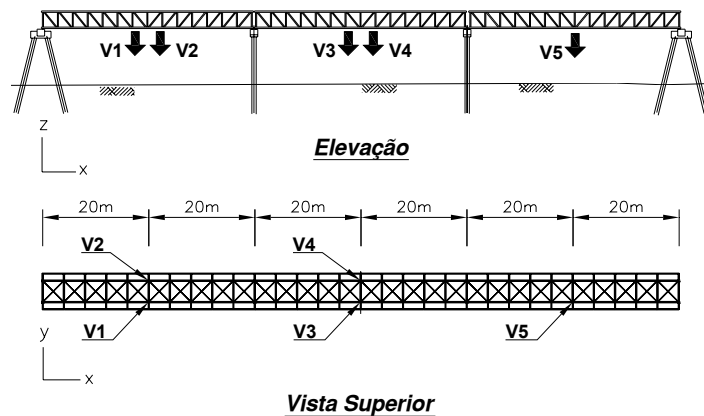


Figura 10. Disposição dos acelerômetros no último segmento, medindo as acelerações na direção Z.

Os sinais tratados mostrados na Figura 11 foram, em seguida, filtrados com emprego de um filtro passa baixa Chebyshev tipo I, com uma frequência de corte de 5.0 Hz. Em seguida, os sinais filtrados foram recuperados no segundo módulo para a definição do posicionamento dos acelerômetros. Após a adição dessas informações, um diagrama de estabilidade foi criado variando a ordem do modelo de 2 a 50 e utilizando os seguintes critérios: 1% para as

freqüências, 5% para os amortecimentos, 5% para os vetores (**MAC**); e como sensores de referência foram utilizados todos os sensores. Adotando-se esses critérios e empregando-se o método **SSI-DATA**, o digrama de estabilidade criado apresentou o aspecto mostrado na Figura 12.

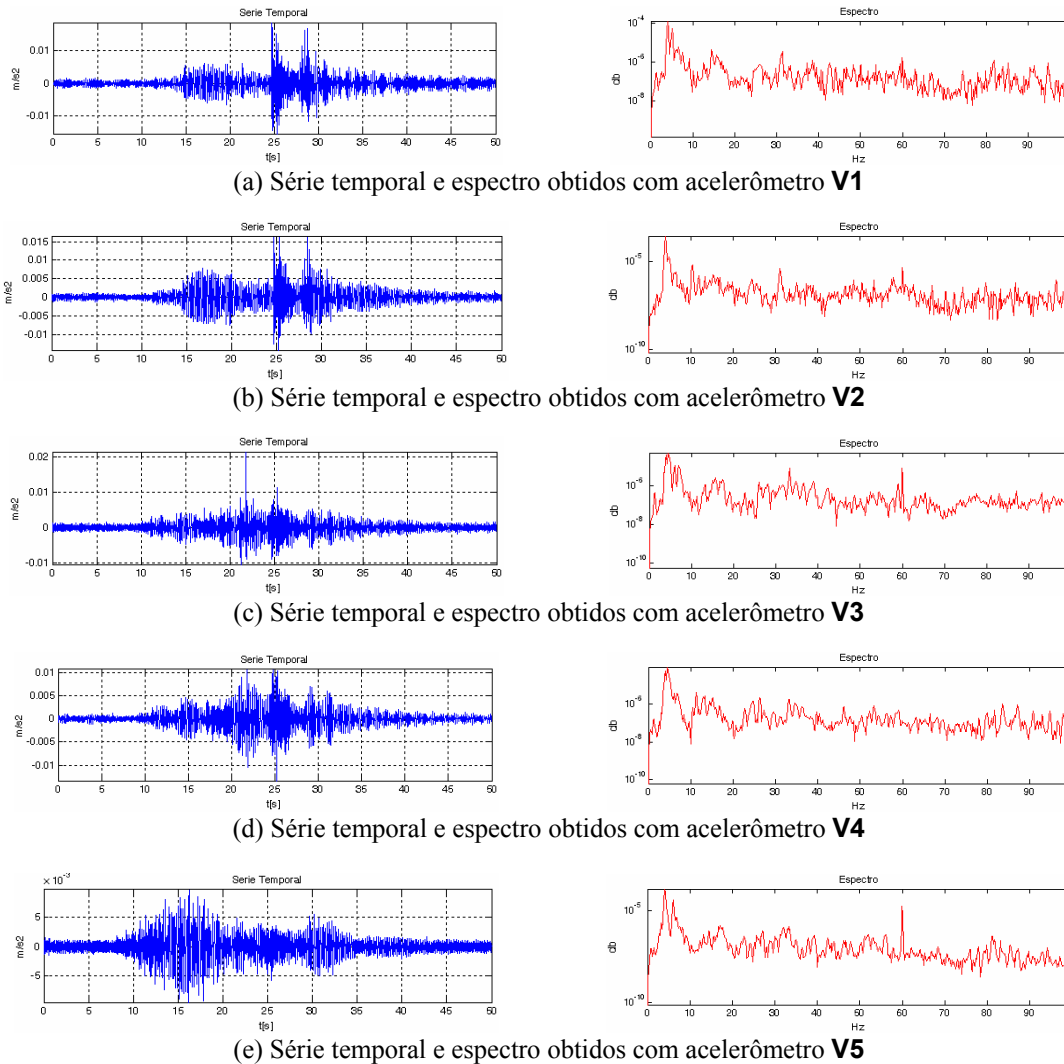


Figura 11. Séries temporais e os respectivos espectros obtidos com os sensores medindo aceleração na direção Z.

No diagrama de estabilidade mostrado na Figura 12, cinco modos de vibração foram claramente identificados na faixa de 0 a 5 Hz. Esses modos são identificados visualmente, uma vez que eles estabilizam na medida em que a ordem do modelo varia de 2 até a ordem máxima que é de 50. Seguindo a metodologia descrita no item 3.3, os modos identificados são, em seguida, marcados para que as respectivas formas modais possam ser exibidas. Os resultados da identificação de parâmetros da ponte do TGL através do método **SSI-DATA** são

apresentados na Tabela 1 e na Figura 13.

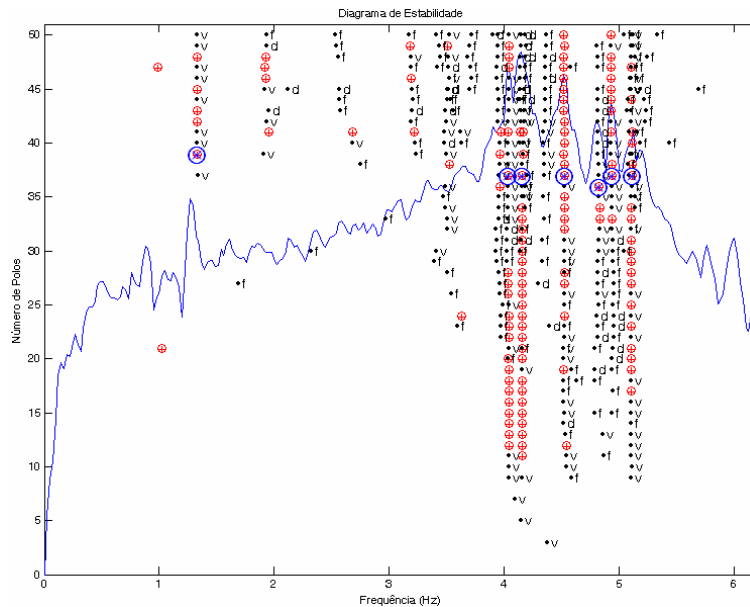


Figura 12. Diagrama de estabilidade obtido criado a partir dos dados de resposta obtidos a partir do arranjo A1 utilizando o método **SSI-DATA**. Os símbolos utilizados são: \oplus - pólo estável; $\bullet v$ - frequência e vetores estáveis; $\bullet d$ - frequência e amortecimento estáveis; $\bullet f$ - frequência estável.

Na Tabela 1 é também estabelecida a comparação entre os resultados teóricos obtidos com o método dos Elementos Finitos (**EF**), e os resultados experimentais obtidos com o método **SSI-DATA**. É importante ressaltar que somente três frequências teóricas foram obtidas em virtude do modelo numérico utilizado na análise teórica não incluir os elementos da estacas das fundações.

Modo	Resultados numéricos (EF)	Resultados experimentais através do método SSI-DATA	
		Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)
1	-	1,312	3,60
2	3.861	4,043	0,86
3	4.235	4,158	0,47
4	-	4,520	0,56
5	-	4,826	0,57
6	4,924	4,936	0,28
7	-	5,111	0,10

Tabela 1. Frequência naturais e fatores de amortecimento identificados através do método **SSI-DATA**.

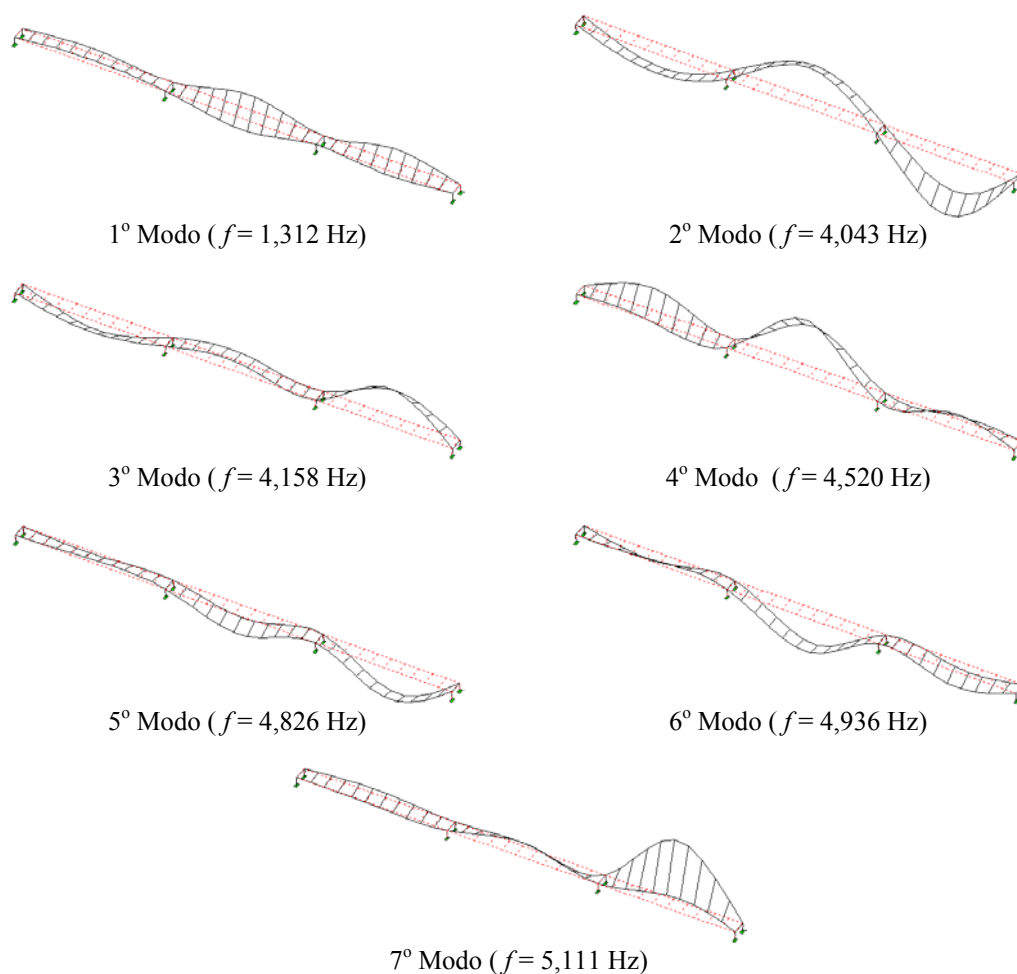


Figura 13. Modos de vibração experimentais obtidos com emprego do método **SSI-DATA**.

6. CONCLUSÕES

Com desenvolvimento do programa de identificação na plataforma Matlab® foram obtidos resultados bastante satisfatórios na identificação modal de estruturas civis [4]. A utilização da plataforma Matlab® proporcionou a elaboração de um programa com uma interface que, apesar de simples, facilita bastante o processo de identificação de parâmetros através dos métodos estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV**. Com relação às técnicas numéricas utilizadas no programa, observa-se um demanda de tempo razoavelmente grande no processamento de séries temporais longas, sobretudo no módulo de identificação, quando a **DVS** e a fatoração **QR** são executadas. No que diz respeito aos métodos estocásticos em espaço dos estados, observou-se grande robustez e precisão no processo de extração de parâmetros a partir somente das séries temporais das respostas obtidas nos ensaios de vibração. Observou-se que, quanto maior for número de amostras dessas séries, mais precisa e robusta será a identificação

dos parâmetros modais. Um outro aspecto observado a partir da comparação entre os dois métodos estudados foi que o **SSI-DATA** forneceu resultados mais precisos que o **SSI-COV**, sobretudo quando a identificação foi realizada em faixas mais amplas de frequência como, por exemplo, de 0 a 10 Hz ou ainda de 0 a 20 Hz.

REFERÊNCIAS

- [1] P. V. OVERSCHEE e B. DE MOOR, “Subspace Identification for Linear Systems, Theory - Implementation - Application”, Kluwer Academic Publishers, Belgium, 1996.
- [2] B. PEETERS, “System Identification and Damage Detection in Civil Engineering”, Ph. D. thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 2000;
- [3] Á. CUNHA, E. Caetano, R. Brincker e P. Andersen, "Identification from the Natural Response of Vasco da Gama Bridge", 22nd International Modal Analysis Conference (IMAC), Dearborn, Michigan, 2004.
- [4] S. D. R. AMADOR, L. A. C. VELOSO, R. M. DE SOUZA e J. R. F. AGUILERA, “Full-Scale Experimental Modal Analysis of an Overhead Transmission Line Tower Crossing Guamá River in The Amazon Region”, Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13), Vienna, Austria, 2006;
- [5] D. C. LAY, “Álgebra Linear e Suas Aplicações”, Segunda Edição, Editora LTC, 1999;
- [6] GLAD, T. e LJUNG, L., “Control Theory – Multivariate and Nonlinear Methods”, Taylor and Francis, 2000.
- [7] B. PEETERS e G. DE ROECK, “Stochastic subspace system identification of a steel transmitter mast”, The International Modal Analysis Conference, USA, 1998, 130-136;
- [8] R. J. ALLEMANG, “Vibrations: Experimental Modal Analysis, Course Notes”, Seventh edition, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, OH, USA, 1999;