



17 a 21 de Mayo de 2004
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo.
Mendoza. Argentina.

Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural

ELEMENTO FINITO DE BARRA PARA ANÁLISE GEOMÉTRICA NÃO-LINEAR ESTÁTICA E DINÂMICA ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO CO-ROTACIONAL

Gandhy Yeddo da Rocha Aranha Júnior

M.Sc. em Eng. Mecânica pela UFPa

Doutorando, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, CT/UFPa

e-mail: gandhy@ufpa.br

Remo Magalhães de Souza

Ph.D. em Engenharia Civil e Ambiental pela UC Berkeley

Professor Adjunto do Departamento de Construção Civil, CT/UFPa

e-mail: remo@ufpa.br

Centro Tecnológico, Universidade Federal do Pará

Av. Augusto Corrêa, n.1, Bairro do Guamá

Belém, Pará, Brasil - CEP: 66075-970

RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo numérico sobre o comportamento de estruturas formadas por barras sujeitas a grandes deslocamentos. Para isto, apresenta-se a formulação de um elemento finito de barra para análise estática e dinâmica geometricamente não-linear de pórticos planos. O tratamento de grandes rotações das barras é realizado utilizando-se a Formulação Co-rotacional, a qual é baseada na utilização de um sistema auxiliar de coordenadas que se move com o elemento a medida que este se deforma. Foi desenvolvido um programa na plataforma Matlab para validação da metodologia proposta. Através do programa desenvolvido, pode-se realizar análises estática, modal e dinâmica (linear ou não-linear). Vários exemplos são apresentados, comparando-se os resultados da formulação proposta com soluções analíticas simplificadas e com resultados de outros modelos apresentados na literatura. Fica demonstrada a eficiência e precisão da presente formulação pela facilidade de tratamento de grandes rotações.

1. Introdução

A análise de estruturas formadas por barras (pórticos, treliças, etc) é uma das principais atividades da engenharia estrutural. As teorias de vigas, conforme relata Yojo (1993), foram inicialmente estudadas a partir do século XVII. Os primeiros estudos referentes ao comportamento

geometricamente não-linear, com o emprego de material elástico linear, foram desenvolvidos por Bernoulli e Euler no começo do século XVIII.

O efeito de não linearidade geométrica na análise estática e/ou dinâmica de estruturas submetidas a grandes deslocamentos e rotações, através do Método dos Elementos Finitos, tem sido tema de diversas pesquisas nas últimas décadas. Tratando da análise de estrutura apertadas, pode-se destacar os trabalhos de Reissner (1972), Oran e Kassimali (1976), Mondkar e Powell (1977), Yang e Saigal (1984), Simo e Vu-Quoc (1986), Crisfield e Shi (1994), Neuenhofert e Filippou (1997), Reddy (1997), Petrangeli e Ciampi (1997), Molins et al (1998), de Souza (2000), entre tantos outros.

A Formulação Co-rotacional foi bastante estudada a partir do trabalho de Argyris et al (1964), seguindo-se então por outros estudos, tais como os trabalhos de Jennings (1968), Powell (1969), Belytschko e Hsieh (1973), Oran (1973). Estudos mais recentes sobre esta formulação foram desenvolvidos, por exemplo, por Iura (1994), Crisfield e Shi (1994), Crisfield e Moita (1996), e Aranha Jr. (2003).

Neste artigo, apresenta-se o estudo do comportamento estático e dinâmico das estruturas formadas por barras sujeitas a grandes deslocamentos, através da formulação co-rotacional e sua implementação na plataforma Matlab, de acordo com o trabalho de Aranha Jr. (2003).

2. Análise estrutural

O estudo desenvolvido abrange a análise estática, análise modal (vibrações livres) e análise dinâmica de estruturas planas formadas por barras (pórticos, treliças e cabos), considerando-se efeitos de não-linearidade geométrica. É importante destacar também que a análise de vibração livre pode ser realizada considerando-se a estrutura na configuração indeformada ou deformada, já que a ocorrência de grandes deformações pode alterar substancialmente as frequências naturais e modos de vibração da estrutura. Este efeito é facilmente observável em cabos, onde o esforço axial de tração altera significativamente as suas frequências naturais.

Uma breve descrição dos aspectos principais destes tipos de análise e os métodos de solução é feita a seguir.

2.1. Análise Estática Linear

Na análise estática linear, considera-se a proporcionalidade entre deslocamentos e forças que atuam na estrutura, e a independência das ações e efeitos em relação ao tempo, de tal forma que a equação de equilíbrio do problema resulta em

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{P}^{\text{ext}} \quad (1)$$

onde \mathbf{P}^{ext} é o vetor de forças externas, \mathbf{D} é o vetor de deslocamentos, \mathbf{K} é a matriz de rigidez da estrutura, a qual é montada a partir da contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento, conforme realizado convencionalmente no Método da Rigidez Direta. A solução do problema expresso pela Eq. (1) é bastante simples, e consiste na resolução de um sistema de equações lineares (após a devida consideração das condições de contorno).

2.2. Análise Estática Não-Linear

Na análise estática não-linear, não existe a proporcionalidade entre forças e deslocamentos, de tal forma que a equação de equilíbrio deve ser escrita como

$$\mathbf{P}^{\text{ext}} - \mathbf{P}(\mathbf{D}) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}(\mathbf{D}) = \mathbf{P}^{\text{ext}} \quad (2)$$

onde $\mathbf{P}(\mathbf{D})$ representa o vetor das forças internas resistentes da estrutura, as quais são dependentes dos deslocamentos nodais. Este vetor é montado a partir das contribuições dos vetores de forças internas de cada elemento da estrutura.

O problema representado pela Eq. (2) consiste em um sistema de equações não lineares, as quais podem ser resolvidas utilizando-se o Método de Newton-Raphson. Para isto, se faz necessária a determinação da matriz Jacobiana do problema

$$K(D) = \frac{\partial P(D)}{\partial D} \quad (3)$$

a qual consiste na matriz de rigidez da estrutura, sendo dependente dos deslocamentos D .

2.3. Análise Dinâmica Linear

Na análise dinâmica linear, considera-se que o carregamento externo varia em função do tempo e considera-se também que atuam, na estrutura, “forças inerciais” e forças de amortecimento, além das forças elásticas (diretamente proporcionais aos deslocamentos). Desta forma, a imposição da Segunda Lei de Newton, ou do Princípio de d’Alembert (Clough e Penzien, 1993, e Chopra, 1995), leva à equação do movimento

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + KD = P^{ext}(t) \quad (4)$$

onde M é a matriz de massa da estrutura, e C é a matriz de amortecimento. O símbolo $(\dot{\quad})$ indica derivação em relação ao tempo, tal que \dot{D} e \ddot{D} representam, respectivamente, o vetor de velocidades e de acelerações nodais da estrutura. Desta forma, as forças inerciais, de amortecimento, e elásticas, são expressas nesta equação pelos termos $M\ddot{D}$, $C\dot{D}$ e KD , respectivamente.

O problema representado pela Eq. (4) consiste em um sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, cuja solução pode ser obtida através de diversos métodos para integração no tempo (*time-step methods*). Dentre os métodos mais comuns, destaca-se o Método de Newmark (1959), o qual é empregado neste estudo.

2.3. Análise Dinâmica Não-Linear

Na análise dinâmica não-linear de estruturas, as forças elásticas não mais são proporcionais aos deslocamentos, de tal forma que a equação do movimento passa a ser escrita como

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + P(D) = P^{ext} \quad (5)$$

onde o termo $P(D)$ representa as forças internas resistentes (ou “elásticas” no caso de material elástico) da estrutura, as quais são dependentes dos deslocamentos nodais.

É interessante observar que as Eqs. (1), (2) e (4) correspondem a casos particulares da Eq. (5). A solução da equação do movimento (5) para uma estrutura com comportamento não linear pode ser obtida empregando-se o Método de Newmark para integração das equações no tempo, e o Método de Newton-Raphson para resolução do sistema de equações não lineares, conforme apresentado por Chopra (1995).

2.4. Análise de Vibrações Livres

A análise de vibrações livres é feita considerando-se que o vetor de cargas externas P^{ext} é nulo. Além disso, no presente estudo, despreza-se o efeito do amortecimento. Com isso, a equação do movimento passa a ter a seguinte forma

$$M\ddot{D} + KD = 0 \quad (6)$$

Considerando-se que a variação dos deslocamentos no tempo podem ser expressos através de uma função harmônica, a Eq. (6) pode ser reescrita na forma de um problema de auto-valor e auto-vetor generalizado

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (7)$$

onde ω representam os auto-valores (frequências naturais da estrutura) e ϕ representam os auto-vetores (modos de vibração). Existem vários métodos para a solução do problemas de auto-valor e auto-vetor. Neste trabalho utiliza-se o algoritmo QR^1 (Watkins 1982).

3. Formulação do Elemento

A formulação de um elemento de barra para a análise estrutural, em geral, envolve a adoção ou desenvolvimento de uma teoria de viga, a qual é baseada em relações cinemáticas definidas a partir de determinadas hipóteses simplificadoras. Além disso, a formulação do elemento, dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos, envolve, em especial, a determinação do vetor de forças resistentes do elemento e da sua matriz de rigidez tangente, a qual é usualmente obtida a partir da linearização do vetor de forças resistentes. A partir do vetor de forças resistentes e da matriz de rigidez tangente do elemento, são montados o vetor de forças resistentes e a matriz de rigidez da estrutura, necessários para a análise estática e dinâmica não linear.

No presente estudo, a formulação do elemento é baseada na Teoria de viga de Bernoulli-Euler, e o efeito de não-linearidade geométrica é inserido utilizando-se a Formulação Co-rotacional.

2.1. Formulação Co-rotacional

A idéia básica da formulação co-rotacional consiste em se separar o movimento (*motion*) de um elemento em duas parcelas, sendo a primeira parcela referente aos modos de corpo rígido (translação e rotação), e a segunda parcela referente à deformação (ou mudança de forma) propriamente dita. Para isto, além dos tradicionais sistemas global e local do elemento empregado no Método da Rigidez Direta para análise de estruturas apertadas, a Formulação Co-rotacional emprega um sistema de coordenadas auxiliar, aqui denominado sistema básico, o qual é livre de modos de corpo rígido, e que se movimenta com o elemento a medida que este se deforma.

Esta idéia também é utilizada no método das forças para análise de pórticos, onde se adota um sistema auxiliar, também livre de modos de corpo rígido, para cada elemento estrutural. Neste tipo de formulação, geralmente são impostas determinadas restrições nodais, para evitar os modos de corpo rígido, fazendo com que as forças nodais associadas aos graus de liberdade restantes sejam linearmente independentes entre si.

Utilizando esse procedimento a formulação do elemento no sistema básico é completamente independente da transformação, isto é, no sistema básico o elemento pode ser formulado como linear e a não-linearidade geométrica é introduzida na transformação. Para esse caso, a formulação pode apresentar arbitrariamente grandes movimentos de corpo rígido, porém com pequenas deformações ao longo do elemento. Ainda assim, se os membros estruturais forem divididos em pequenos elementos, a Formulação Co-rotacional pode ser utilizada para a solução de problemas com deformações finitas.

2.2. Sistemas de coordenadas

Um elemento finito de pórtico plano, com dois nós I e J , é esquematicamente representado na Figura 1 com referência a três sistemas de eixos cartesianos: um sistema global (x^G, y^G) , um sistema local (x^L, y^L) , e um sistema básico (x^B, y^B) . Os sistemas global e local são

¹ O algoritmo QR utilizado faz parte da biblioteca padrão de funções do *Matlab*.

tradicionalmente utilizados no Método da Rigidez Direta. O Sistema básico é geralmente utilizado em formulações de flexibilidade (Método das Forças) e também na formulação co-rotacional.

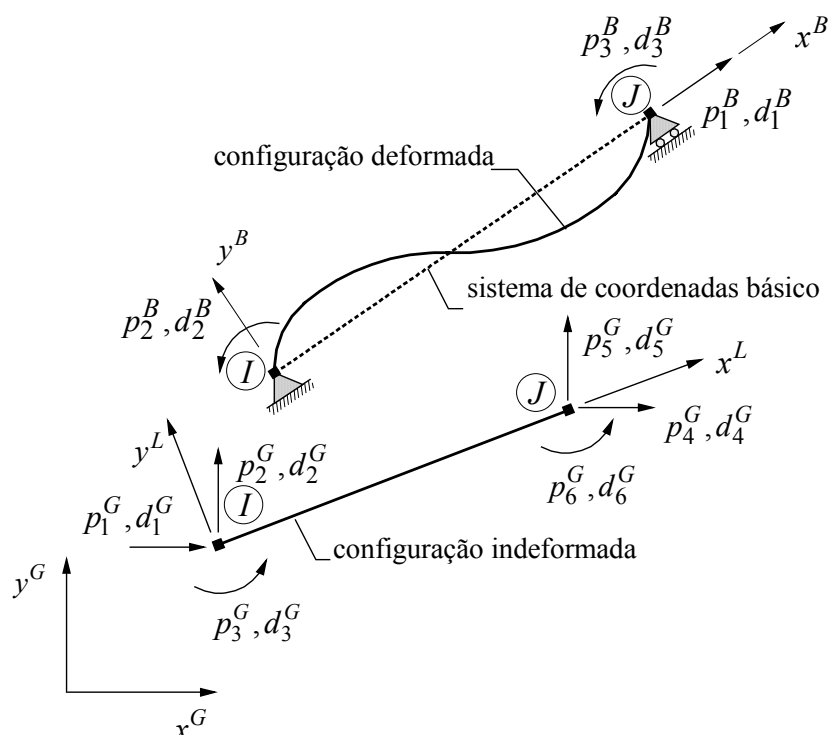


Figura 1 – Sistemas de coordenadas e graus de liberdade

Em referência aos sistemas de coordenadas locais e globais, o elemento possui seis graus de liberdade, sendo duas translações e uma rotação para cada um dos nós do elemento. Claramente, estes seis graus de liberdade estão associados a três modos de corpo rígido.

As forças e deslocamentos nodais do elemento são agrupados nos vetores \mathbf{p}^G e \mathbf{d}^G , conforme mostrado na Figura 1

$$\mathbf{p}^G = \langle p_1^G \quad p_2^G \quad p_3^G \quad p_4^G \quad p_5^G \quad p_6^G \rangle^T \quad \text{e} \quad \mathbf{d}^G = \langle d_1^G \quad d_2^G \quad d_3^G \quad d_4^G \quad d_5^G \quad d_6^G \rangle^T \quad (8)$$

O sistema local (x^L, y^L) é definido convencionalmente, de tal forma que o eixo x^L coincida com o eixo indeformado da barra, conectando os nós I e J .

Conforme discutido anteriormente, a idéia básica da formulação Co-rotacional consiste em se eliminar os modos do corpo rígido, adotando-se um terceiro sistema de coordenadas auxiliar, aqui denominado sistema básico, sendo também mostrado na Figura 1. O sistema básico (x^B, y^B) deve ser definido de tal forma que existam apenas três graus de liberdade, escolhidos de tal forma que não ocorram modos de corpo rígido. Diversos sistemas básicos são possíveis, sendo que em geral, no Método das Forças se adotam restrições nodais correspondentes a vigas biapoiadas, ou engastadas e livres (em balanço). Neste trabalho, o sistema básico é definido considerando-se as restrições nodais de uma viga bi-apoiada, de tal forma que o eixo x^B conecte as posições deslocadas dos nós I e J , coincidindo com a corda da viga, conforme ilustrado na figura.

No sistema básico adotado, o elemento possui três graus de liberdade: um deslocamento axial u_J , e duas rotações θ_I e θ_J relativas à corda. Estes deslocamentos relativos correspondem ao mínimo número de variáveis geométricas necessárias para descrever os modos de deformação do elemento. As três forças nodais estaticamente independentes associadas a estes deslocamentos são

uma força axial N e dois momentos fletores M_I e M_J . Estes deslocamentos e forças do elemento são agrupados nos vetores \mathbf{p}^B e \mathbf{d}^B , respectivamente.

$$\mathbf{p}^B = \begin{Bmatrix} p_1^B \\ p_2^B \\ p_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_I \\ M_J \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d}^B = \begin{Bmatrix} d_1^B \\ d_2^B \\ d_3^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_J \\ \theta_I \\ \theta_J \end{Bmatrix} \quad (9)$$

2.3. Configuração Inicial da Barra

A Figura 2 mostra o elemento na configuração deformada, e o sistemas de coordenadas global (x^G, y^G) , local (x^L, y^L) e básico (x^B, y^B) . Sejam $\hat{\mathbf{e}}_1^L$ e $\hat{\mathbf{e}}_2^L$ os vetores unitários que formam a base do sistema local. O vetor $\hat{\mathbf{e}}_1^L$ pode ser escrito como

$$\hat{\mathbf{e}}_1^L = \begin{Bmatrix} \cos \alpha^L \\ \sin \alpha^L \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{X}_{IJ}}{L} \quad (10)$$

onde α^L é o ângulo que o eixo x^L forma com o eixo x^G ,

$$\mathbf{X}_{IJ} = \mathbf{X}_J - \mathbf{X}_I = \begin{Bmatrix} X_J \\ Y_J \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_I \\ Y_I \end{Bmatrix} \quad (11)$$

representa a diferença entre as coordenadas globais dos nós J e I , e

$$L = \|\mathbf{X}_{IJ}\| = (\mathbf{X}_{IJ}^T \mathbf{X}_{IJ})^{1/2} \quad (12)$$

é o comprimento inicial, ou indeformado, da barra.

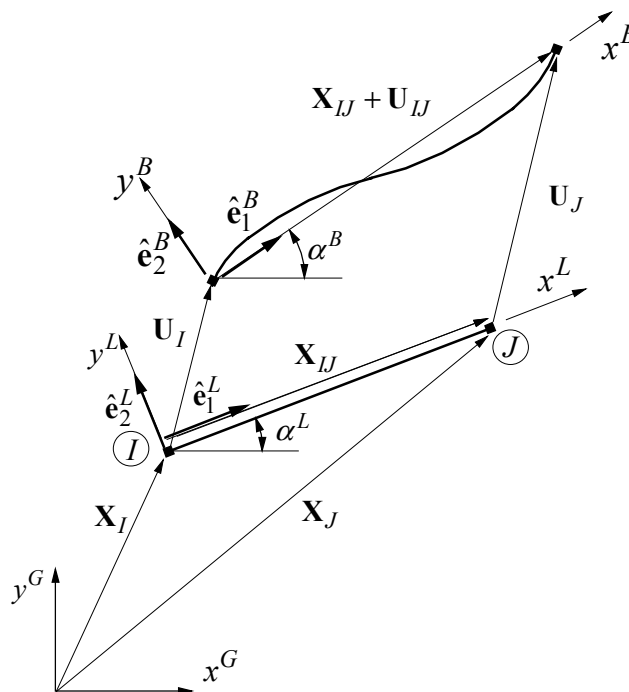


Figura 2 - Vetores para determinação dos deslocamentos do elemento

O outro vetor base do sistema local é representado por \hat{e}_2^L e é obtido através da expressão

$$\hat{e}_2^L = \{-\text{sen } \alpha^L \quad \cos \alpha^L\}^T \quad (13)$$

O subscrito IJ é empregado para representar a diferença entre duas grandezas relacionadas com os nós I e J .

2.4. Configuração Deformada da Barra

O vetor dos deslocamentos em relação ao sistema global pode ser representado como

$$\mathbf{d}^G = \begin{Bmatrix} d_1^G \\ d_2^G \\ d_3^G \\ d_4^G \\ d_5^G \\ d_6^G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_I \\ V_I \\ \gamma_I \\ U_J \\ V_J \\ \gamma_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_J \end{Bmatrix} \quad (14)$$

onde U , V e γ representam, respectivamente, o deslocamento na direção x^G , deslocamento na direção y^G , e rotação em em torno do eixo z^G . O elemento na configuração deformada é representado na Figura 2, onde \mathbf{U}_I e \mathbf{U}_J são os vetores que representam os deslocamentos dos nós I e J medidos em relação ao sistema global.

Sejam \hat{e}_1^B e \hat{e}_2^B os vetores unitários que formam a base do sistema básico. O vetor \hat{e}_1^B pode ser expresso como

$$\hat{e}_1^B = \begin{Bmatrix} \cos \alpha^B \\ \text{sen } \alpha^B \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{X}_{IJ} + \mathbf{U}_{IJ}}{l} \quad (15)$$

onde α^B é o ângulo que o eixo x^B forma com o eixo x^G ,

$$\mathbf{U}_{IJ} = \mathbf{U}_J - \mathbf{U}_I = \begin{Bmatrix} U_J \\ V_J \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} U_I \\ V_I \end{Bmatrix} \quad (16)$$

representa a diferença entre os deslocamentos globais dos nós J e I , e

$$l = \|\mathbf{X}_{IJ} + \mathbf{U}_{IJ}\| = \left[(\mathbf{X}_{IJ} + \mathbf{U}_{IJ})^T (\mathbf{X}_{IJ} + \mathbf{U}_{IJ}) \right]^{1/2} \quad (17)$$

é o comprimento deformado da barra.

O outro vetor unitário do sistema básico é

$$\hat{e}_2^B = \{-\text{sen } \alpha^B \quad \cos \alpha^B\}^T \quad (18)$$

2.5. Transformação de Deslocamentos entre os Sistemas de Coordenadas

A Figura 3 mostra os deslocamentos do elemento de barra no sistema básico. De acordo com esta figura, o deslocamento axial da barra é dado pela diferença entre o comprimento deformado e o comprimento inicial do elemento, ou seja

$$d_1^B = u_J = l - L \quad (19)$$

As rotações do sistema básico mostradas na Figura 3 são dadas por

$$d_2^B = \theta_I = (\gamma_I + \alpha^L) - \alpha^B \quad (20)$$

$$d_3^B = \theta_J = (\gamma_J + \alpha^L) - \alpha^B \quad (21)$$

O ângulo α^B pode ser obtido através da equação

$$\alpha^B = \arctan\left(\frac{Y_{IJ} + V_{IJ}}{X_{IJ} + U_{IJ}}\right) \quad (22)$$

onde o numerador da expressão (22) corresponde à soma das ordenadas dos vetores X_{IJ} e U_{IJ} , e o denominador corresponde a soma das abscissas dos mesmos vetores.

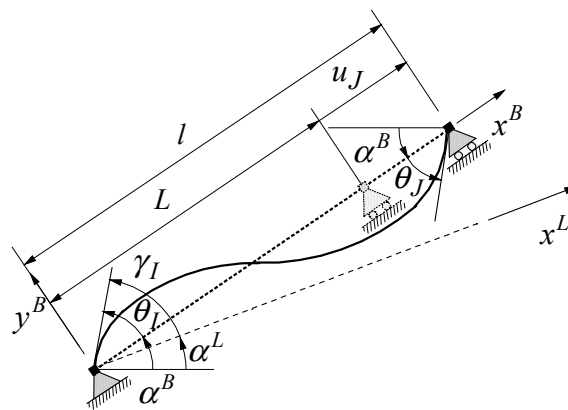


Figura 3 - Barra na configuração deformada, com seus respectivos deslocamentos

De Souza (2000) chama a atenção para a limitação de uso das expressões (20), (21) e (22) em problemas submetidos a grandes rotações de corpo rígido, pelo fato da Eq. (22) somente ser válida para o caso em que $|\alpha^B| < 90^\circ$ devido a utilização da função \arctan . Porém, tal restrição pode ser resolvida com uma implementação computacional apropriada da função \arctan (utilizando-se dois argumentos independentes para o numerador e o denominador).

De Souza (2000) propõe o procedimento abaixo para determinação unívoca de θ_I e θ_J . Este procedimento se aplica para qualquer valor da rotação de corpo rígido α^B , requerendo apenas que as magnitudes das rotações θ_I e θ_J , relativas à corda, sejam menores do que 90° . Entretanto, isto não é, de forma alguma, uma condição restritiva para os casos práticos, já que a medida que os membros estruturais são divididos em elementos menores, as rotações θ_I e θ_J se tornam cada vez menores.

Empregando transformações elementares da trigonometria e considerando $\beta_I = \gamma_I + \alpha^L$, e as Eqs. (20) e (21), o valor de θ_I é então dado por

$$\theta_I = \arctan\left(\frac{\cos \alpha^B \operatorname{sen} \beta_I - \operatorname{sen} \alpha^B \cos \beta_I}{\cos \alpha^B \cos \beta_I + \operatorname{sen} \alpha^B \operatorname{sen} \beta_I}\right) \quad (23)$$

Procedendo da mesma maneira e considerando $\beta_J = \gamma_J + \alpha^L$, o valor de θ_J é dado por

$$\theta_J = \arctan\left(\frac{\cos \alpha^B \operatorname{sen} \beta_J - \operatorname{sen} \alpha^B \cos \beta_J}{\cos \alpha^B \cos \beta_J + \operatorname{sen} \alpha^B \operatorname{sen} \beta_J}\right) \quad (24)$$

A relação tangencial entre os deslocamentos nos sistemas básico e global pode ser calculada através da derivada dos deslocamentos no sistema básico \mathbf{d}^B , cujas componentes são dadas pelas Eqs. (19), (20) e (21), em relação aos deslocamentos no sistema global \mathbf{d}^G , tal que

$$\delta \mathbf{d}^B = \frac{\partial \mathbf{d}^B}{\partial \mathbf{d}^G} \delta \mathbf{d}^G \quad (25)$$

onde $\delta \mathbf{d}^B$ e $\delta \mathbf{d}^G$ são as variações dos deslocamentos nos sistemas básico e global respectivamente.

Conforme apresentado por de Souza (2000), e Aranha Jr. (2003), derivando-se os deslocamentos \mathbf{d}^B do sistema básico em relação aos deslocamentos globais \mathbf{d}^G (ver as Eqs. (19), (20) e (21)), e utilizando-se a Eq. (25), chega-se a seguinte relação

$$\delta \mathbf{d}^B = \mathbf{T} \delta \mathbf{d}^G \quad (26)$$

onde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha^B & -\operatorname{sen} \alpha^B & 0 & \cos \alpha^B & \operatorname{sen} \alpha^B & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen} \alpha^B}{l} & \frac{\cos \alpha^B}{l} & 1 & \frac{\operatorname{sen} \alpha^B}{l} & -\frac{\cos \alpha^B}{l} & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen} \alpha^B}{l} & \frac{\cos \alpha^B}{l} & 0 & \frac{\operatorname{sen} \alpha^B}{l} & -\frac{\cos \alpha^B}{l} & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

é a matriz de transformação entre o sistema global e básico. Deve-se enfatizar que esta matriz é obtida sem nenhuma aproximação geométrica, sendo exata para quaisquer valores de α^B .

2.6. Vetor de Forças e Matriz de Rigidez do Elemento no sistema Básico

A matriz de rigidez do elemento no sistema básico (viga bi-apoiada), considerando-se material linear elástico, é bastante conhecida (ver Aranha Jr. (2003)), sendo dada por

$$\mathbf{k}^B = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (28)$$

onde A e I são respectivamente a área e momento de inércia da seção, e E é o módulo de deformação longitudinal do material.

O vetor de forças do elemento no sistema básico é obtido a partir do vetor de deslocamentos

$$\mathbf{p}^B = \mathbf{k}^B \mathbf{d}^B \quad (29)$$

Percebe-se portanto a relação linear entre forças e deslocamentos no sistema básico, sendo que o efeito de não linearidade geométrica é introduzido na transformação entre os sistemas básico e global.

2.7. Transformação de Forças entre os Sistemas de Coordenadas

Pode-se obter a relação entre as forças do sistema global e as forças do sistema básico por condições de equilíbrio (de Souza (2000) e Aranha Jr. (2003)), resultando na equação

$$\mathbf{p}^G = \mathbf{T}^T \mathbf{p}^B \quad (30)$$

Deve-se então notar a relação entre as Eqs. (26) e (30), o que correspondente ao Princípio da Contragradiência para o caso não linear (a matriz que transforma incrementos de deslocamento do sistema global para o básico, quando transposta transforma forças do sistema básico para o global). Esta relação também pode ser facilmente obtida a partir do Princípio dos Deslocamentos Virtuais, como uma alternativa para a imposição direta de equilíbrio.

2.8. Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Global

A matriz de rigidez tangente do elemento no sistema global é obtida através da linearização da Eq. (30), tal que

$$\delta \mathbf{p}^G = \mathbf{k}^G \delta \mathbf{d}^G \quad (31)$$

onde

$$\mathbf{k}^G = \frac{\partial \mathbf{p}^G}{\partial \mathbf{d}^G} \quad (32)$$

Após as devidas operações (ver de Souza (2000) e Aranha Jr. (2003)), chega-se a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema global

$$\mathbf{k}^G = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^B \mathbf{T} + \mathbf{k}_{\text{geo}} \quad (33)$$

onde

$$\mathbf{k}_{\text{geo}} = \sum_{r=1}^3 \mathbf{G}_r p_r^B \quad (34)$$

é a matriz de rigidez puramente geométrica, com

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_3 = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (35)$$

sendo

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -(\hat{\mathbf{e}}_2^B)^T & 0 & (\hat{\mathbf{e}}_2^B)^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -(\hat{\mathbf{e}}_1^B)^T & 0 & (\hat{\mathbf{e}}_1^B)^T & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Por fim, cabe destacar que neste artigo foi apresentada uma transformação de forças, deslocamentos e rigidez diretamente entre os sistemas básico e global. Alternativamente, poderia ser feita uma transformação em duas etapas: uma entre os sistemas básico e local, e outra entre os sistemas local e global (esta última consistindo, na verdade, do emprego da matriz de rotação comumente utilizada no Método da Rigidez Direta).

3. Descrição do Programa Computacional

O estudo desenvolvido baseia-se na formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos (Método da Rigidez Direta), utilizando o Método de Newmark para integração das equações do movimento no tempo, e o Método de Newton-Raphson para solução dos sistemas de equações não lineares.

Utilizando-se estes métodos, foi desenvolvido um programa computacional, que possibilita a realização de análise estática, análise modal (vibrações livres) e análise dinâmica de estruturas planas formadas por barras (pórticos, treliças e cabos). As análises estática e dinâmica podem ser lineares ou não-lineares. É importante destacar também que a análise de vibração livre pode ser realizada considerando-se a estrutura na configuração indeformada ou deformada, já que a ocorrência de grandes deformações podem alterar substancialmente as frequências naturais e modos de vibração da estrutura. Este efeito é facilmente observável em cabos, onde a força de tração altera significativamente as suas frequências naturais.

Embora o estudo aborde apenas o efeito de não-linearidade geométrica, o programa pode ser facilmente modificado para consideração do efeito de não-linearidade física.

4. Exemplos

Para verificação e comprovação do elemento proposto foram realizadas análises de diversos exemplos, os quais são mostrados a seguir.

4.1. Análise Estática Não-Linear de um Cabo

Este exemplo consiste na análise estática de um cabo pré-tensionado, com comprimento de 312,7m, submetido a um carregamento distribuído transversal de 46,11 N/m, correspondente a seu peso próprio, e a uma força de tração aplicada nas extremidades, conforme ilustra a Figura 4. O módulo de elasticidade do cabo é igual a $1,31 \times 10^{11}$ Pa, a área da seção transversal é igual a $5,48 \times 10^{-4}$ m², e o momento de inércia igual a $1,4 \times 10^{-12}$ m⁴.

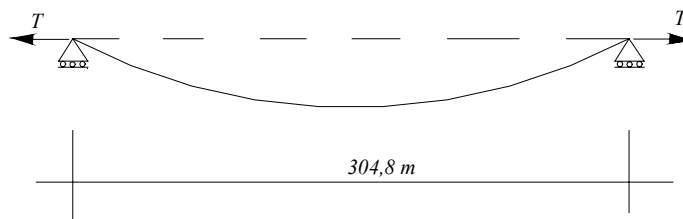


Figura 4 - Cabo sujeito a esforço de tração nos apoios

O cabo foi discretizado com 20 elementos. Na análise, aumenta-se a força de tração do cabo, e verifica-se a diminuição da flecha no meio do vão. A força inicial de tração considerada é $T = 17794$ N, a qual é posteriormente multiplicada por 2, 3, 4, ..., 20. A distância entre apoios para o valor da força de tração inicial T é igual a 304,8m, conforme ilustra a Figura 4. Este estudo foi inicialmente apresentado por Ali e Ghaffar (1995) e por Oliveira (2002), que empregou elementos isoparamétricos de cabos com quatro nós.

Na Figura 5 é registrada para cada valor da força de tração a flecha no meio do vão do cabo.

Conclui-se, através da figura 5, que com o aumento da força de tração no cabo, a flecha obtida no meio do vão tende a reduzir. Isto demonstra o efeito da parcela de rigidez da estrutura referente a matriz de rigidez geométrica, a qual aumenta em função de aumento no esforço de tração. Observa-se que os resultados obtidos pelo método apresentado são bem próximos dos resultados encontrados por Oliveira (2002).

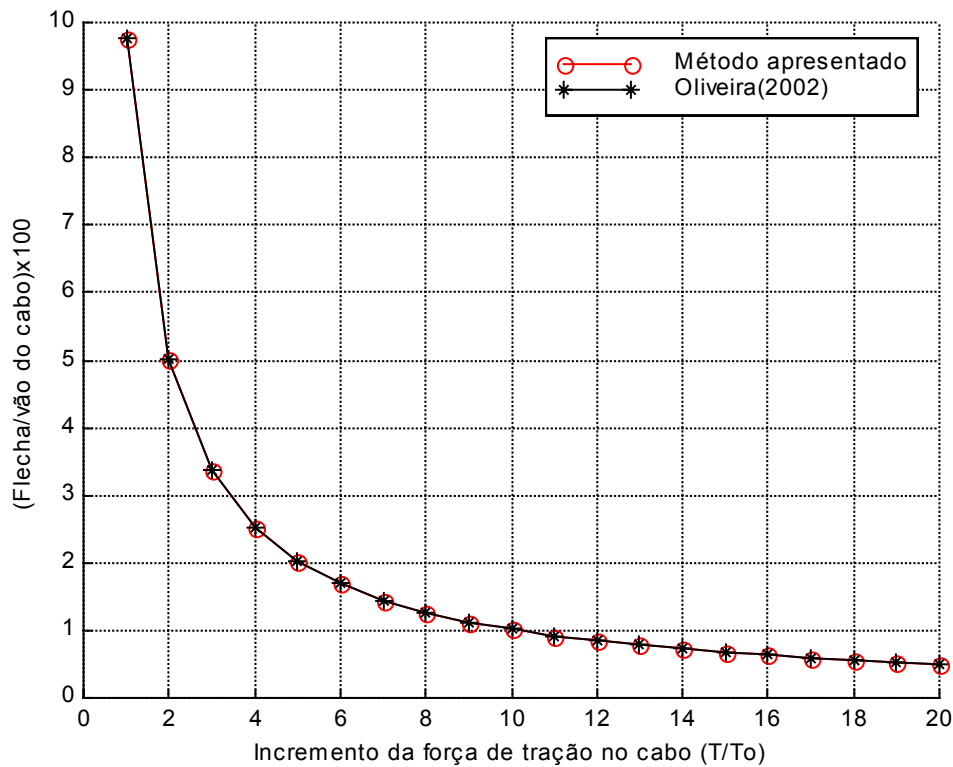


Figura 5 - Redução da flecha com o aumento da força de tração

4.2. Análise Estática Não-Linear do Pórtico de Lee

Este exemplo consiste no estudo estático não-linear do pórtico de Lee (Figura 6), o qual consiste em um exemplo clássico apresentado na literatura sobre análise estrutural geometricamente não-linear. O pórtico é constituído por duas barras, cada uma com comprimento de 120 cm e seção transversal retangular com 3 cm de base e 2 cm de altura. O material tem módulo de elasticidade igual a 70608 MPa.

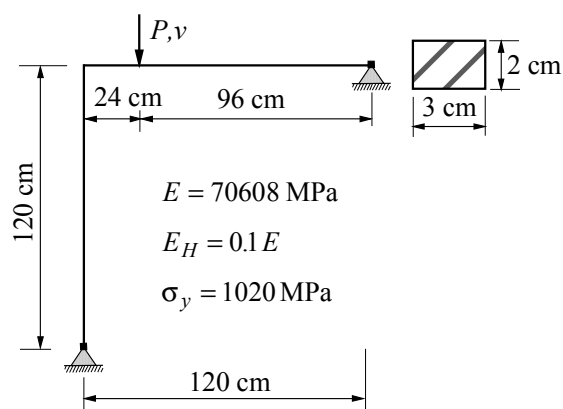


Figura 6 - Pórtico de Lee.

De Souza (2000) realizou o estudo do comportamento não-linear geométrico considerando inicialmente o material linear elástico e em seguida o material como elasto-plástico. No presente trabalho é feito o estudo apenas para o caso não-linear geométrico com material linear elástico. No

presente trabalho foi empregada uma discretização correspondente a 10 elementos por barra, no total de 20 elementos e 21 nós. Este é o mesmo número de elementos empregados por Cichon (1983) conforme mostra De Souza (2000).

A Figura 7 mostra os resultados obtidos com a formulação proposta e os resultados obtidos por de Souza (2000), para o caso da análise não-linear geométrica considerando o material linear elástico. Os resultados encontrados mostram que a estrutura sofre grandes deslocamentos comprovando a sua grande não-linearidade geométrica.

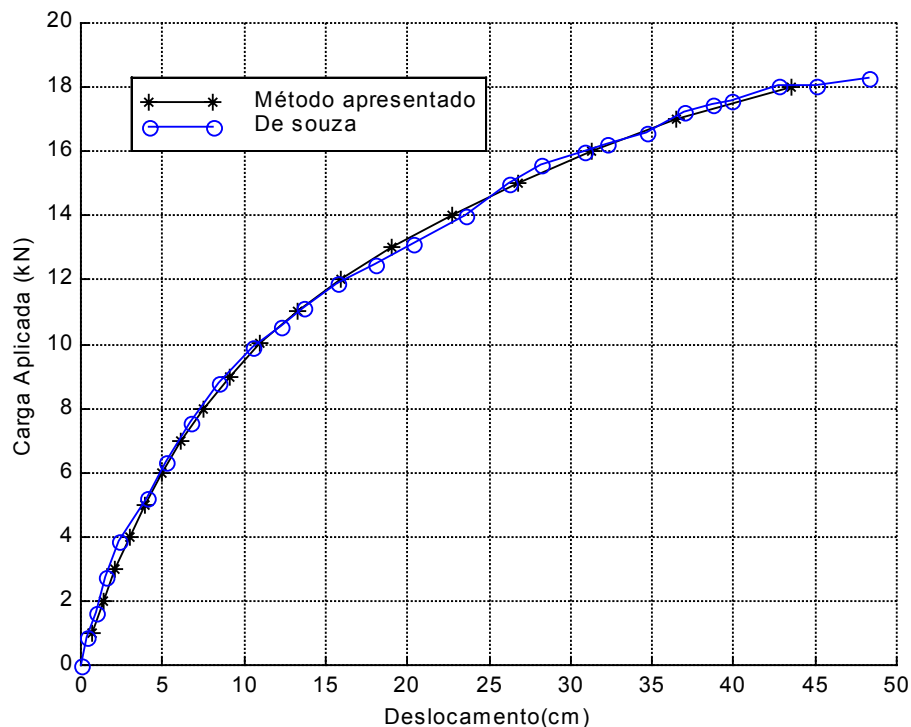


Figura 7 - Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga para o pórtico de Lee.

A partir da Figura 7, conclui-se que os resultados obtidos utilizando-se o método apresentado são bem próximos dos resultados encontrados por de Souza (2000). Entretanto, deve-se destacar que a trajetória de equilíbrio apresentada foi interrompida no primeiro ponto limite, em função da impossibilidade de se ultrapassar este ponto utilizando-se o Método de Newton-Raphson. Na verdade, a trajetória de equilíbrio completa deste problema é bem complexa, pois a estrutura apresenta os fenômenos de *snap-back* e *snap-through*.

A Figura 8 mostra a trajetória de equilíbrio completa. A figura apresentada foi gerada por de Souza (2002).

4.3. Análise Dinâmica Linear de um Torre Submetida a Carga Degrau

Chopra (1995) faz a análise dinâmica linear de uma torre engastada e livre, com 600 pés de altura, empregando 5 elementos, conforme apresentado na Figura 9, e utilizando o método de Newmark. Na extremidade de cada um dos quatro primeiros elementos é considerada uma massa concentrada de 208,6 kip-s²/ft. No final do quinto elemento a massa é igual a metade da massa dos demais nós, conforme indica a figura 10. A rigidez da seção da torre é $EI = 5,5469 \times 10^{10}$ kip-ft² e o intervalo de tempo utilizado na análise é de 0,1 s. Na extremidade livre é aplicada uma força degrau horizontal de intensidade igual a 1000 kips.

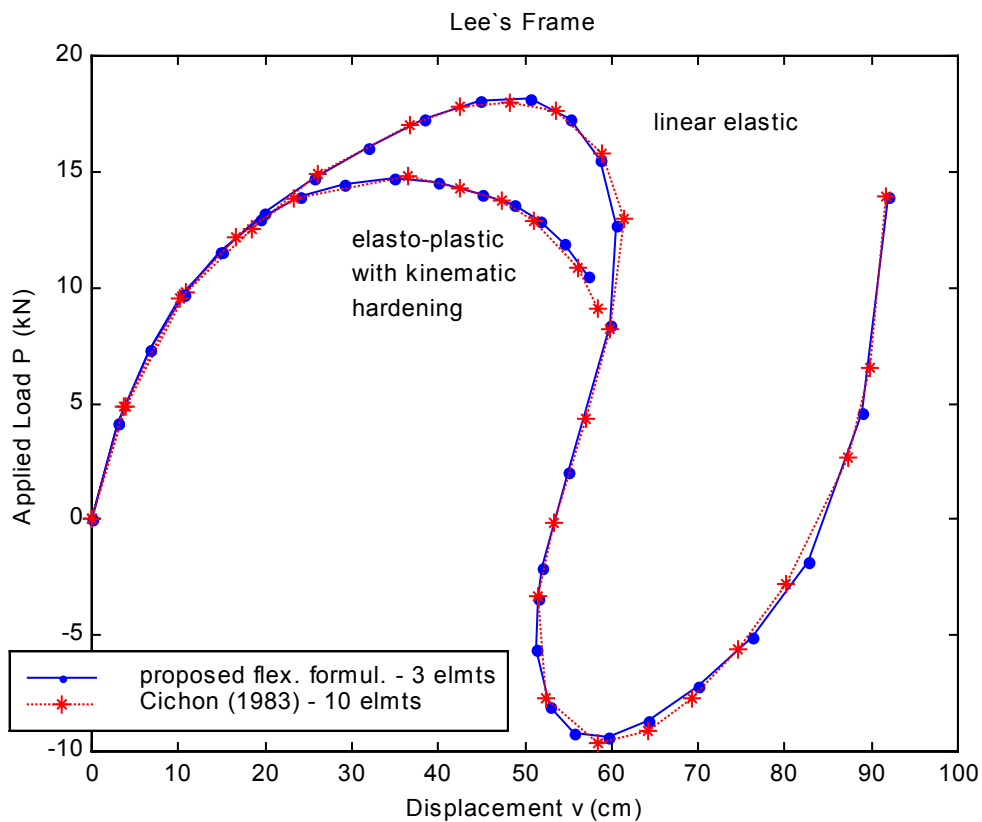


Figura 8 - Trajetória completa de equilíbrio do pórtico de Lee (de Souza, 2000).

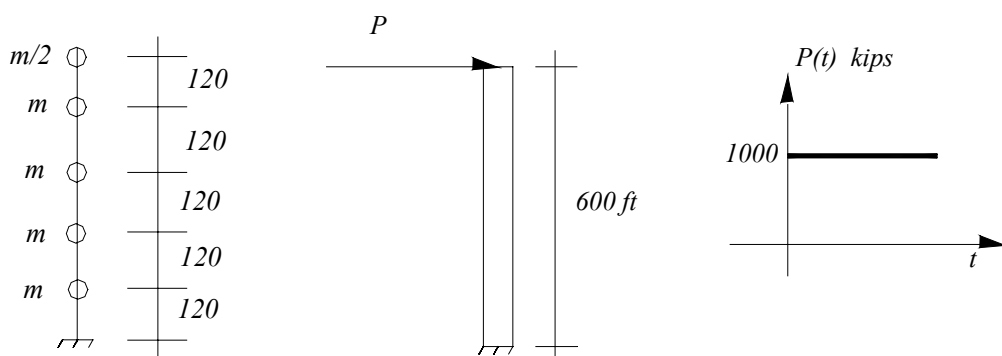


Figura 9 - Torre sujeita a carga degrau.

Os resultados encontrados pelo método apresentado e os obtidos por Chopra (1995) encontram-se na Figura 10.

Observa-se que os resultados obtidos, nesta análise são coincidentes. Como trata-se de uma estrutura com comportamento linear, este resultado já era esperado, pois ambos as soluções apresentadas utilizam o Método de Newmark com o mesmo incremento de tempo. O objetivo deste exemplo, era na verdade o de verificar o funcionamento do programa.

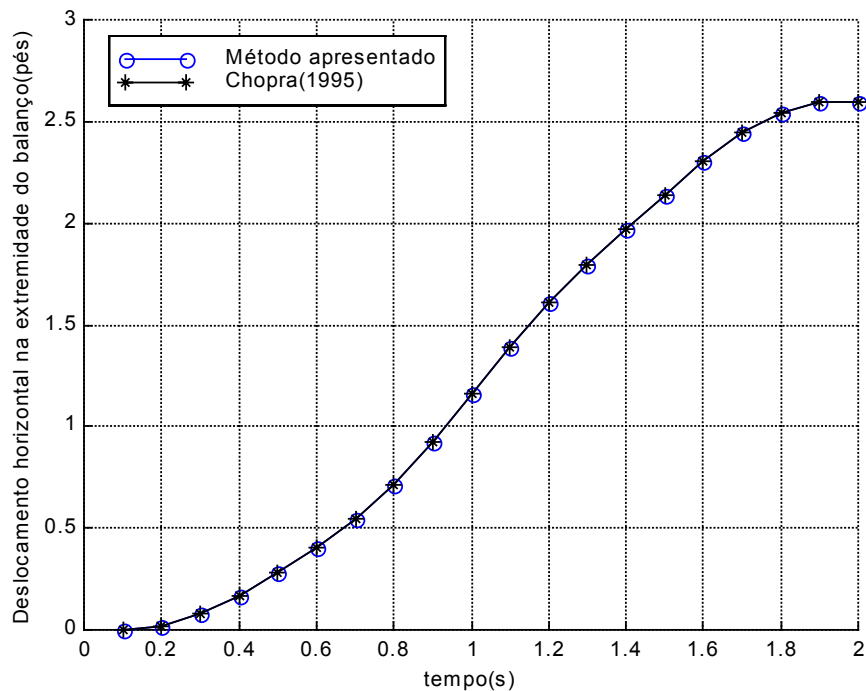


Figura 10 - Deslocamentos na extremidade da torre.

4.4. Análise Dinâmica Linear de uma Viga Biapoiada

Este exemplo consiste em uma análise dinâmica linear de uma viga bi-apoiada, submetida a uma carga degrau aplicada no meio do vão. A Figura 11 mostra a viga e o carregamento atuante em seu ponto médio.

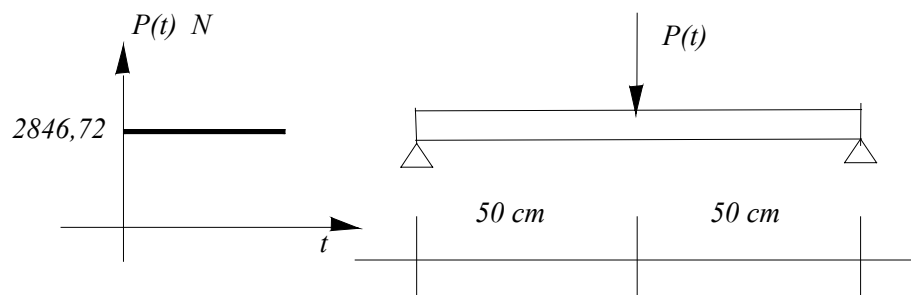


Figura 11 - Viga bi-apoiada sujeita a carga degrau.

O comprimento total da viga é de 100 cm, e a massa total é igual a 15 kg. A seção é retangular com base de 15 cm e altura de 40 cm. O módulo de elasticidade do material é $2,0685^{11}$ N/m².

Este problema é resolvido analiticamente por Chopra (1995). A solução apresentada corresponde aos deslocamentos verticais do ponto médio da barra.

A estrutura foi discretizada com 30 elementos. A Figura 12 mostra o resultado obtido para o deslocamento vertical da viga no meio do vão. Nesta figura mostram-se tantos os resultados obtidos pelo programa elaborado e aqueles encontrados com o emprego da resposta analítica apresentado por Chopra (1995).

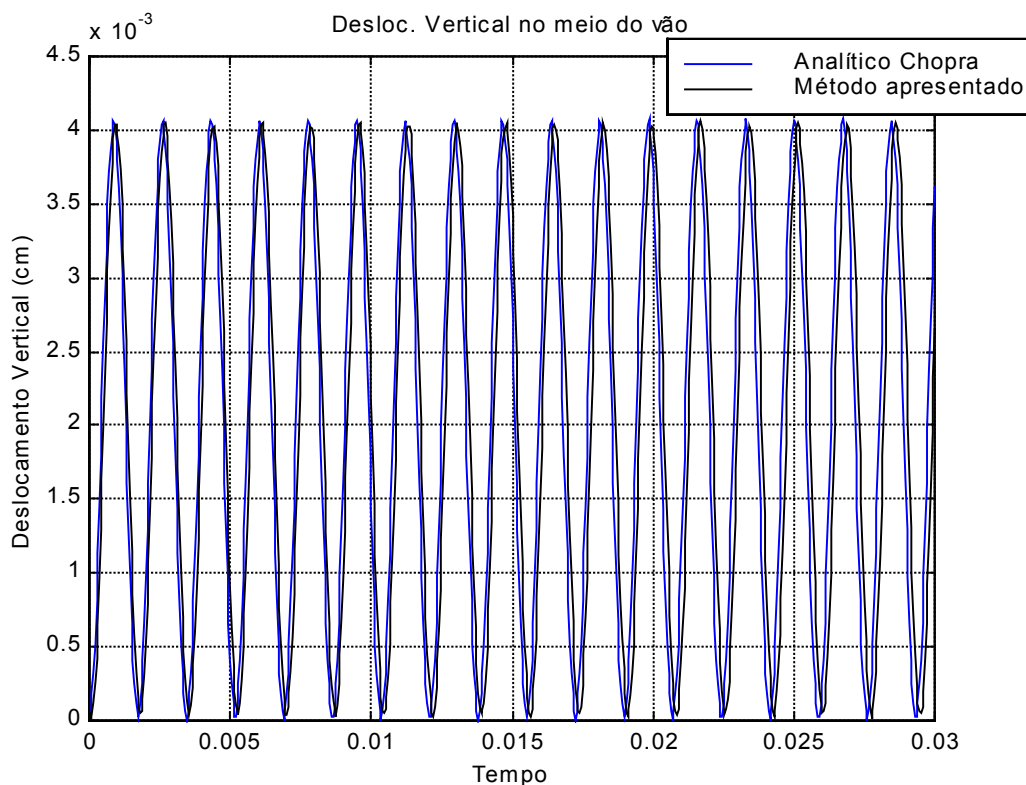


Figura 12 - Deslocamento vertical no ponto médio da viga bi-apoiada sujeita a carga degrau

Pode-se observar que a viga apresenta pequenos deslocamentos em seu ponto médio, e que os resultados obtidos numericamente aproximam satisfatoriamente a solução analítica apresentada por Chopra (1995).

4.5. Análise Dinâmica Não-Linear de uma Viga Bi-engastada

Neste exemplo faz-se uma análise dinâmica não-linear geométrica da viga bi-engastada, sujeita a uma carga degrau concentrada no meio do vão, analisada por Mondkar e Powell (1977), e Yang e Saigal (1984).

A viga possui comprimento total de 20 polegadas, seção transversal retangular, com base de 1 polegada e altura de 1/8 de polegada. O módulo de elasticidade do material da viga é $E = 3 \times 10^7$ psi, o coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e a massa $q = 0,0026 \text{ lb} \times \text{s} / \text{in}^2$. O método de Newmark é empregado para $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,5$. A força externa aplicada é do tipo degrau com valor de 640 lbf. A Figura 13 mostra a viga e o carregamento aplicado.

É importante ressaltar que as unidades estão sendo empregadas no sistema inglês com o objetivo de se ter uma boa comparação com o resultado apresentado por Yang e Saigal (1984).

A Figura 13 mostra os deslocamentos verticais do nó central, onde está sendo aplicada a carga degrau de 640 lbf. A resposta obtida corresponde ao emprego de 10 elementos e com intervalo de tempo de $200 \mu\text{s}$ e um tempo total de análise de $50000 \mu\text{s}$.

Yang e Saigal (1984) realizaram o estudo discretizado da viga com o emprego de 3, 4 e 6 elementos, sendo mostrado na Figura 14 o gráfico referente a 6 elementos. É importante destacar que o estudo desta viga foi realizado inicialmente por Mondkar e Powell (1977).

Os resultados apresentados por Yang e Saigal (1984) e Mondkar e Powell (1977), apresentam um erro em seus gráficos, pois ambos mostram a escala de tempo um décimo menor do que a real.

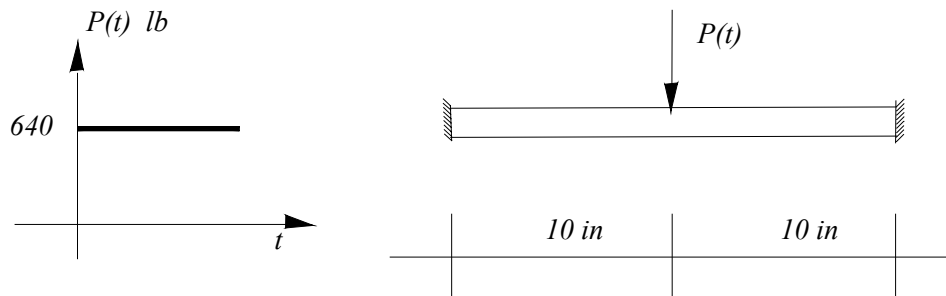


Figura 13 - Viga bi-engastada sujeita a carga degrau

A confirmação da falha de ambos foi feita através da verificação do gráfico apresentado por Mondkar e Powell (1977) para a análise linear da mesma viga, sendo que os resultados para o caso linear também apresentam o mesmo problema no eixo do tempo.

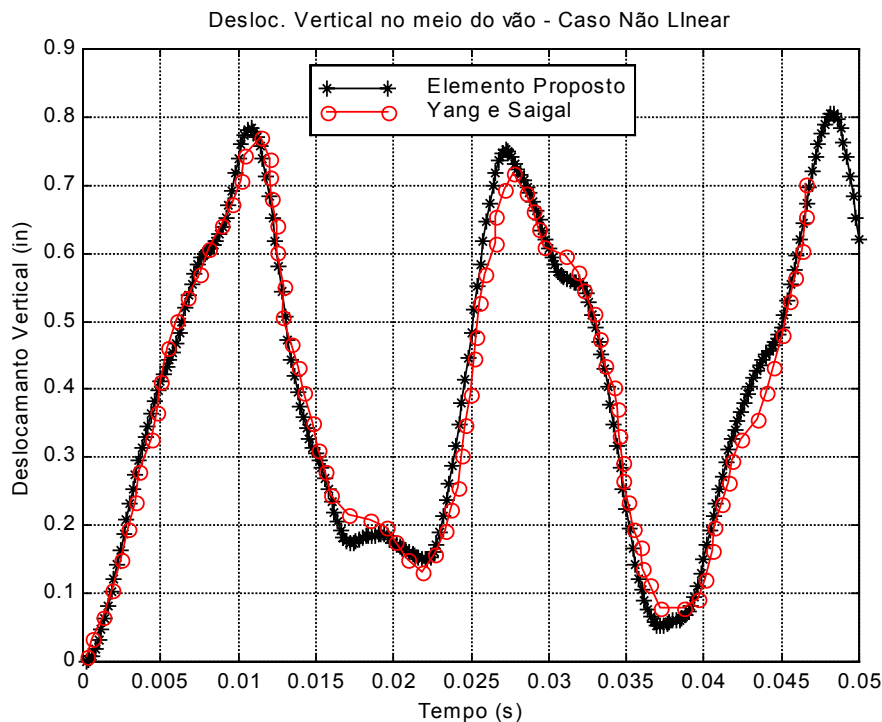


Figura 14 - Resposta dinâmica da viga bi-engastada

O resultado apresentado na Figura 14 referente à solução de Yang e Saigal (1984) teve a escala de tempo corrigida (multiplicada por 10), a fim de proporcionar a correta comparação com os resultados obtidos através do método proposto. Observa-se que os resultados apresentam boa concordância, com pequenas diferenças causadas pelo pequeno grau de discretização utilizado, ou pelo fato do passo de tempo considerado não ser pequeno o suficiente.

A Figura 15 mostra o comportamento linear apresentado por Mondkar e Powell (1977).

O resultado dos deslocamentos do ponto médio da viga apresenta da mesma forma que para o caso não-linear, uma diferença no tempo de 1/10. Como o exemplo da viga bi-apoiada com a carga degrau, para o caso linear já foi verificado, conclui-se que os artigos de Yang e Saigal (1984) e Mondkar e Powell (1977) apresentam esta falha.

Com fins apenas ilustrativos, a Figura 16 mostra tanto o resultado linear como o não-linear para a análise dinâmica da viga estudada.

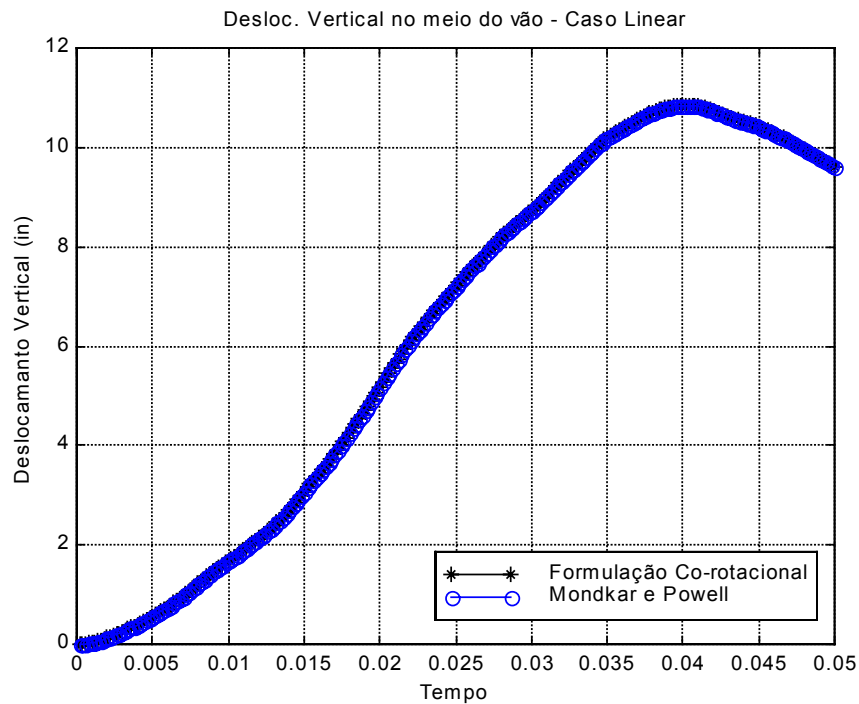


Figura 15 - Resposta dinâmica linear da viga bi-engastada

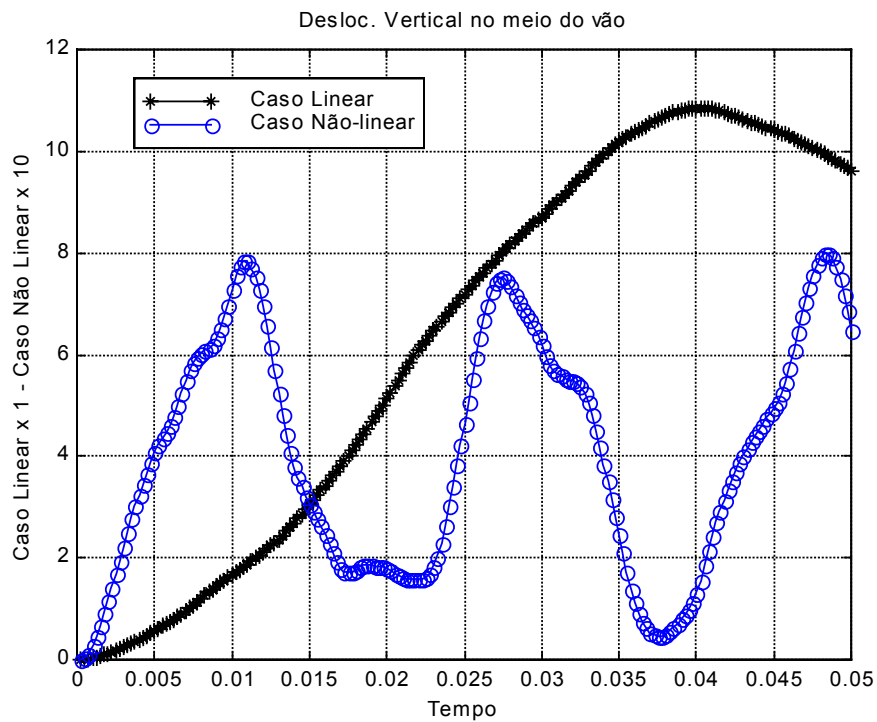


Figura 16 - Resposta dinâmica da viga bi-engastada, casos linear e não-linear

5. Conclusões

Os resultados obtidos para os exemplos apresentados no texto comprovam a precisão e eficiência da metodologia proposta na análise não-linear estática e dinâmica de estruturas formadas por barras.

Na fase de implementação computacional, foi observada a facilidade da elaboração do programa na plataforma Matlab. O Matlab apresenta diversos algoritmos já implementados (tais como algoritmos para solução de sistemas lineares, solução para problemas de auto-valor, etc.), o que foi bastante útil no desenvolvimento do programa.

O emprego da Formulação Co-rotacional permitiu tratar com simplicidade as grandes deformações às quais as estruturas analisadas estavam sujeitas. Neste método cada elemento é tratado como linear no sistema auxiliar básico e a não-linearidade é introduzida na transformação de coordenadas entre este sistema básico e o sistema global.

O programa elaborado pode ser perfeitamente empregado em diversas situações práticas onde se tenha a não-linearidade geométrica suplantando os efeitos da não-linearidade física, ou seja, problemas em que grandes deslocamentos alteram basicamente a forma da estrutura ainda com comportamento elástico.

Nos exemplos apresentados foi verificado que o programa elaborado apresentou resultados excelentes quando comparados com outros existentes na literatura.

6. Referências Bibliográficas

- ARANHA JÚNIOR, G.Y.R. Formulação de um Elemento Finito de Barra para Análise Dinâmica Não-Linear Geométrica, com Aplicação a Cabos de Linhas Aéreas de transmissão de Energia Elétrica. Dissertação de Mestrado. **UFPA**, 2003.
- ARGYRIS, J.H.; KELSEY, S. e KAMEL, H. Matrix Methods of Structural Analysis: A Precise of Recent Developments. **Pergamon Press Oxford**, 1964.
- BELYTSCHKO, T. e HSIEH, B. J. Non-Linear Transient Finite Element Analysis with Convected Coordinates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, p.255-271, 1973.
- CHOPRA, A.K. Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering. **Prentice Hall**, 1995.
- CRISFIELD, M.A. e SHI, J. A Co-rotational Element/Time-Integration Strategy for Non-linear Dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p.1897-1913, 1994.
- CRISFIELD, M.A. e MOITA, G.F. A Unified Co-rotational Framework for Solids, Shells and Beams. **International Journal Solids and Structures**, v. 33, n. 20-22, p.2969-2992, 1996.
- CRISFIELD M.A. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Vol. 1. **John Wiley & Sons**, 2001.
- DE SOUZA, R. M. Force-Based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames. Dissertation Doctor of Philosophy. **University of California, Berkeley - USA**, 2000.
- IURA, M. Effects of Coordinate System on the Accuracy of Corotational Formulation for Bernoulli-Euler's Beam. **Int. J. Solids Structures**, v. 31, p 2793-2806, 1994.
- JENNINGS, A. Frame Analysis Including Change of Geometry. **Journal of Structural Division**, v. 94, n. ST3, p. 627-644, 1968
- MONDKAR, D.P. e POWELL, G.H. Finite Element Analysis of Non-Linear Static and Dynamic Response. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, 499-520, 1977.
- NEUENHOFER, A. E FILIPPOU, F.C. Evaluation of Nonlinear Frame Finite Element Models. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, p. 958-966, 1997.

- NEWMARK, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 85, 1959, pp. 67-94.
- ORAN, C. Tangent Stiffness in Plane Frames **Journal of the Structural Division**, v.99, p.973-985, 1973-a.
- ORAN, C. Tangent Stiffness in Space Frames Journal of the Structural Division, v.99, p.987-1001, 1973-b.
- ORAN, C. e KASSIMALI, A. Large Deformations of Framed Structures Under Static and Dynamic Loads. **Computers & Structures**, v.6, p.539-547, 1976.
- POWELL, G. H. (1969). "Theory of nonlinear elastic structures." *J. Struct. Div., ASCE*, 95(ST12), 2687-1969.
- PETRANGELI, M. e CIAMPI, V. Equilibrium Based Iterative Solutions for the Non-linear Beam Problem. International **Journal for Numerical Methods for Engineering**, v. 40, p.423-437, 1997.
- REDDY, J.N. On Locking-Free Shear Deformable Beam Finite Elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 149, p.113-132, 1997.
- REISSNER, E. (1972). "On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem." *J. Appl. Math. Phys (ZAMP)*, 23, 795-804.
- SIMO, J. C., and VU-QUOC, L. (1986). "A three-dimensional finite strain rod model: Part 2: Computational aspects." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 58, 79-116.
- YANG, T.Y. e SAIGAL, S. A Simple Element for Static and Dynamic Response of Beams with Material and Geometric Nonlinearities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p.851-867, 1984.
- YOJO, T. Análise Não-Linear Geometricamente Exata de Pórticos Espaciais, Com Aplicação a Torres de Transmissão de Alta Tensão. Tese de Doutorado. **USP**, 1993.
- WATKINS, D. "Understanding the QR Algorithm." *SIAM Review* 24(1982), pp.427-440.