



## APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS NA ANÁLISE COMPUTACIONAL DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS A FLEXÃO COMPOSTA RETA

Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres (1); Jair José dos Santos Gomes (2);  
Remo Magalhães de Souza (3)

(1) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Pará  
email: [plinioglauber@ig.com.br](mailto:plinioglauber@ig.com.br), [pglauber@civ.puc-rio.br](mailto:pglauber@civ.puc-rio.br)

(2) Engenheiro Civil, Universidade Federal do Pará  
email: [jjs Gomes@ig.com.br](mailto:jjs Gomes@ig.com.br)

(3) Professor Adjunto do Departamento de Construção Civil - Universidade Federal do Pará  
email: [remo@ufpa.br](mailto:remo@ufpa.br)

Departamento de Construção Civil - Edifício do Centro Tecnológico - Campus Universitário do Guamá  
Av. Augusto Corrêa, n.1 – Guamá CEP: 66075-970 – Belém – Pa

### Resumo

Neste trabalho faz-se um estudo do comportamento de seções de concreto armado de peças submetidas a solicitações normais. Um dos principais objetivos desta pesquisa é verificar a precisão das diversas técnicas de integração numérica na análise de seções de concreto armado. Para isso, foi desenvolvido um programa na plataforma *Matlab* para modelagem numérica de uma seção em concreto armado de forma a reproduzir o seu comportamento mecânico em situações reais de carregamento, ou em ensaios de laboratório. Com o programa desenvolvido, é possível gerar as ferramentas necessárias para a análise de uma seção de concreto armado, das quais pode-se destacar: Diagramas de interação Esforço Normal-Momento fletor; curvas esforços-deformação (trajetórias de equilíbrio da seção) e diagramas Momento fletor-Curvatura.

Para a análise das seções foram utilizados métodos numéricos de integração tais como: o método do Ponto Médio, o método dos Trapézios, o método de Simpson e o método de Gauss. Além disso, foi também utilizado o método de Newton-Raphson, para a obtenção de raízes de equações de equilíbrio da seção. As rotinas de cálculo de esforços e obtenção de raízes descritas são as mesmas utilizadas por programas de análise não linear de pórticos em concreto armado.

Neste estudo são feitas comparações entre os métodos numéricos utilizados, assim como análises de convergência, com a finalidade de se determinar os métodos mais eficientes. Também são mostrados exemplos práticos para validação do programa, e comprovação da precisão dos resultados obtidos.

Quanto à análise de convergência dos métodos de integração concluiu-se que todos os métodos se mostraram apropriados para a análise de seções de concreto armado, com destaque para o método do Ponto Médio, o qual, apesar de ser um dos métodos mais simples, mostrou-se muito eficaz. Quanto ao cálculo dos deslocamentos em vigas e pilares, observou-se que para deformações no regime elástico as equações da resistência dos materiais são bastante precisas. Porém, para deformações fora do regime elástico, tais equações podem levar a erros substanciais.

## 1. Introdução

O crescente aumento da resistência e do desempenho do concreto devido ao desenvolvimento de novos materiais proporcionam um grande incentivo ao estudo e aplicação do concreto armado em diversos tipos de estruturas (MEHTA e MONTEIRO (1993))

Embora pesquisas sobre o comportamento de seções de concreto armado venham sendo desenvolvidos há bastante tempo, trata-se ainda de uma linha de pesquisa muito ativa e que motiva a publicação de muitos estudos sobre o assunto (BRONDUM-NIELSEN (1985)), DUMONT et al (1987), MUSSO JR (1987), SILVA (1992), DALL'ASTA et al (1992), ALVES (2000), PARCHE (2000)).

O objetivo principal deste estudo consiste no desenvolvimento de um programa para simulação do comportamento mecânico de uma seção em concreto armado, a fim de reproduzir este comportamento em situações reais de carregamento.

A justificativa de se fazer um programa para análise e obtenção de esforços resistentes em seções de concreto armado está na necessidade de simular situações reais, tais como em ensaios mecânicos de laboratório, de forma rápida, precisa e econômica. Através de simulações computacionais, realizadas *a priori*, pode-se melhor planejar a execução destes ensaios, assim como validar os resultados obtidos na análise experimental.

Outra aplicação muito importante para o programa desenvolvido consiste na obtenção de esforços de serviço em colunas e vigas de estruturas em construção (edifícios, pontes, etc), a partir de dados de deformação dos elementos estruturais obtidos através de instrumentação com extensômetros elétricos.

## 2. Equações Gerais para Flexo-Compressão

Seja uma seção de material qualquer submetida a flexão composta reta, descrita com referência a um sistema de coordenadas  $(y, z)$  conforme indica a figura 1. Sem perda de generalidade, considera-se que o eixo de referência  $z$  passa pelo centro de gravidade da seção de concreto, conforme ilustra a figura.

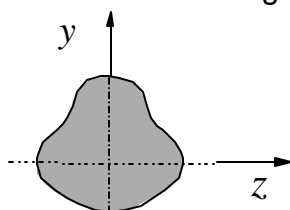


Figura 1 – Seção transversal simétrica, com referência a um sistema  $(y, z)$ .

Admitindo-se a hipótese de seção plana, o estado de deformação da seção pode ser definido através de duas grandezas cinemáticas, escolhidos neste estudo como sendo a deformação normal  $e_0$  avaliada no eixo de referência  $z$ ; e a curvatura da seção  $j$  em torno do eixo  $z$ . Estas duas grandezas  $e_0$  e  $j$  são denominadas deformações generalizadas da seção, e podem ser relacionadas com as deformações unitárias na base e no topo da seção como

$$e_0 = \frac{e_t + e_b}{2} \quad j = \frac{e_b - e_t}{h} \quad (1)$$

onde  $e_b$  é a deformação unitária normal na base da seção (lado inferior) e  $e_t$  é a deformação no topo da seção (lado superior). A deformação unitária normal em uma fibra de coordenada  $y$  qualquer pode ser obtida como

$$e(y) = e_0 - yj \quad (2)$$

A tensão  $\mathbf{s}(y)$  (em um ponto de coordenada  $y$ ) pode ser facilmente obtida, a partir da deformação deste ponto, utilizando-se a relação constitutiva do material, escrita de forma genérica como

$$\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{e}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{s}(y) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{e}(y)) \quad (3)$$

onde  $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{e})$  representa uma função genérica (procedimento) que permite calcular a tensão no material a partir da deformação unitária.

De acordo com as equações da mecânica dos sólidos, o esforço normal  $N$  e o momento fletor  $M$  atuantes na seção podem ser determinados pelas seguintes expressões genéricas

$$N = \int_A \mathbf{s}(y) dA \quad M = - \int_A \mathbf{s}(y) y dA \quad (4)$$

onde  $A$  é a área da seção.

A fim de se utilizar uma notação mais compacta, pode-se agrupar as deformações e os esforços da seção, em dois vetores

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (5)$$

onde  $\mathbf{e}$  é denominado vetor de deformações generalizadas da seção, e  $\mathbf{F}$  é denominado vetor de forças internas ou resistentes da seção.

Utilizando-se esta notação compacta, a eq. (2) pode ser reescrita como

$$\mathbf{e}(y) = \mathbf{e}_0 - y\mathbf{j} = \langle 1 \quad -y \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \mathbf{a}(y)\mathbf{e} \quad (6)$$

com

$$\mathbf{a}(y) = \langle 1 \quad -y \rangle \quad (7)$$

Também de forma compacta, o vetor de forças internas pode ser expresso como

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A \mathbf{s}(y) dA \\ - \int_A \mathbf{s}(y) y dA \end{Bmatrix} = \int_A \mathbf{a}(y)^T \mathbf{s}(y) dA \quad (8)$$

Em diversas situações da análise estrutural (como por exemplo na análise não linear física de estruturas de concreto armado), torna-se necessária a determinação da matriz de rigidez da seção, a qual é definida como sendo a derivada do vetor de forças  $\mathbf{F}$  da seção em relação ao vetor de deformações  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{e}_0} & \frac{\partial N}{\partial \mathbf{j}} \\ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{e}_0} & \frac{\partial M}{\partial \mathbf{j}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Substituindo a eq. (8) em (9) tem-se

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left( \int_A \mathbf{a}(y)^T \mathbf{s}(y) dA \right) = \int_A \mathbf{a}(y)^T \frac{\partial \mathbf{s}(y)}{\partial \mathbf{e}} dA \quad (10)$$

A derivada da tensão  $\mathbf{s}$  em relação ao vetor de deformações pode ser obtida considerando-se as eqs. (3) e (6) e utilizando-se a regra da cadeia

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{e}} = E_t \mathbf{a} \quad (11)$$

onde

$$E_t = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial f(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} \quad (12)$$

é o módulo de deformação tangente do material.

Substituindo a eq. (11) em (10) chega-se a

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{e}} = \int_A \mathbf{a}(y)^T E_t(y) \mathbf{a}(y) dA = \int_A \begin{bmatrix} E_t(y) & -E_t(y)y \\ -E_t(y)y & E_t(y)y^2 \end{bmatrix} dA \quad (13)$$

Para o caso particular de seções de material homogêneo e linear elástico, com eixo de referência passando pelo centro geométrico da seção, a matriz de rigidez da seção assume a expressão usual

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material, e  $I$  é o momento de inércia da seção.

### 3. Seções de concreto armado sujeitas a flexo-compressão

As equações apresentadas no item anterior se aplicam a uma seção de material qualquer (não necessariamente linear-elástico e homogêneo). Considera-se neste item uma seção retangular de concreto armado, com armadura dupla, conforme indicado na Figura 2.

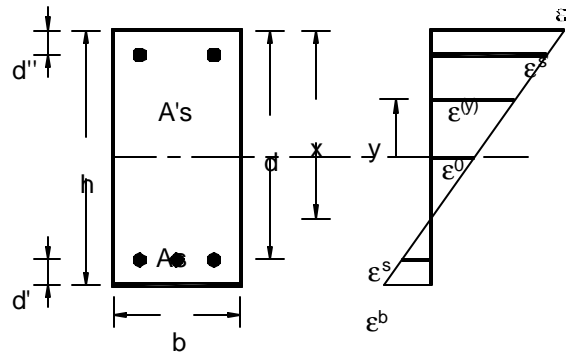


Figura 2 – (a) Seção em concreto armado; (b) Distribuição das deformações na seção transversal.

Usualmente, as deformações unitárias que definem o estado de deformação em uma seção em concreto armado são a deformação no topo da seção  $e_{c_{\max}}$  (relacionada com o esmagamento do concreto) e a deformação  $e_s$  na armadura mais tracionada. A partir destas deformações  $e_{c_{\max}}$  e  $e_s$ , pode-se determinar as deformações  $e_t$  e  $e_b$  como

$$e_t = e_{c_{\max}} \quad \text{e} \quad e_b = e_{c_{\max}} - (e_{c_{\max}} - e_s) \frac{h}{d} \quad (15)$$

Com isso, pode-se então determinar os valores de  $e_0$  e  $j$  através da utilização das eqs. (1).

No que diz respeito às relações constitutivas do material, considera-se uma relação constitutiva para o concreto e outra para o aço (de acordo com a eq. (3))

$$\mathbf{s}_c = \tilde{\mathbf{s}}_c(\mathbf{e}_c) \quad \text{ou} \quad \mathbf{s}_c(y) = \tilde{\mathbf{s}}_c(\mathbf{e}_c(y)) \quad (16)$$

$$\mathbf{s}_s = \tilde{\mathbf{s}}_s(\mathbf{e}_s) \quad \text{ou} \quad \mathbf{s}_s(y) = \tilde{\mathbf{s}}_s(\mathbf{e}_s(y)) \quad (17)$$

onde o subscrito  $c$  denota concreto e o subscrito  $s$  denota aço (*steel*).

No caso de seções de concreto armado, usualmente despreza-se a variação de deformações na área de cada barra da armadura.

Com esta simplificação, as eqs. (4) podem ser escritas como

$$N = \int_{A_c} \mathbf{s}_c(y) dA + \mathbf{s}_s A_s + \mathbf{s}'_s A'_s \quad M = - \left( \int_{A_c} \mathbf{s}_c(y) y dA + \mathbf{s}_s y_s A_s + \mathbf{s}'_s y'_s A'_s \right) \quad (18)$$

onde  $\mathbf{s}_s$ ,  $\mathbf{s}'_s$ ,  $y_s$ ,  $y'_s$ ,  $A_s$  e  $A'_s$  denotam as tensões, as posições e as áreas da armadura inferior e superior, respectivamente.

As eqs. (18) podem ser escritas de forma mais compacta como

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \int_A \mathbf{a}(y)^T \mathbf{s}_c(y) dA + \mathbf{a}(y_s)^T \mathbf{s}_s A_s + \mathbf{a}(y'_s)^T \mathbf{s}'_s A'_s \quad (19)$$

Ainda desprezando-se a variação das deformações em cada barra, a matriz de rigidez da seção em concreto armado, pode ser expressa, a partir da eq. (13) como

$$\mathbf{k} = \int_{A_c} \mathbf{a}(y)^T E_c(y) \mathbf{a}(y) dA + \mathbf{a}(y_s)^T E_s(y_s) \mathbf{a}(y_s) + \mathbf{a}(y'_s)^T E_s(y'_s) \mathbf{a}(y'_s) \quad (20)$$

Pode-se reescrever as eqs. (19) e (20) como sendo formadas por três parcelas

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}'_s \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_c + \mathbf{k}_s + \mathbf{k}'_s \quad (21)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \int_A \mathbf{a}(y)^T \mathbf{s}_c(y) dA & \mathbf{F}_s &= \mathbf{a}(y_s)^T \mathbf{s}_s A_s & \mathbf{F}'_s &= \mathbf{a}(y'_s)^T \mathbf{s}'_s A'_s \\ \mathbf{k}_c &= \int_{A_c} \mathbf{a}(y)^T E_c(y) \mathbf{a}(y) dA & \mathbf{k}_s &= \mathbf{a}(y_s)^T E_s(y_s) \mathbf{a}(y_s) & \mathbf{k}'_s &= \mathbf{a}(y'_s)^T E_s(y'_s) \mathbf{a}(y'_s) \end{aligned} \quad (22)$$

são as parcelas de força e rigidez para o concreto, armadura inferior e armadura superior respectivamente.

#### 4. Métodos de Integração Numérica

As integrais presentes nas eqs. (19) e (20) podem ser avaliadas numericamente utilizando-se diversas técnicas de quadratura, tais como o Método dos Trapézios, Método de Simpson, Método de Gauss, etc. (BURGOYNE et al (1990), BURDEN et al. (1993)).

Pode-se representar estes processos de integração numérica na solução de uma integral, de forma genérica, como sendo

$$I = \int_y f(y) dy \cong \sum_{i=1}^n f(y_i) w_i \quad (23)$$

onde  $n$  é o número de pontos de integração, com  $y_i$  e  $w_i$  sendo a coordenada e o peso de um ponto  $i$ . Pode-se demonstrar que quanto maior for o número de pontos de integração, maior é a precisão do resultado numérico.

Para as integrais presentes nas eqs. (22), avaliadas sobre a seção retangular de concreto armado, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \int_A \mathbf{a}(y)^T \mathbf{s}(y) dA = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{a}(y)^T \mathbf{s}(y) b dy = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{f}(y) dy \cong \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(y_i) w_i \\ \mathbf{k}_c &= \int_{A_c} \mathbf{a}(y)^T E_c(y) \mathbf{a}(y) dA = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{a}(y)^T E_c(y) \mathbf{a}(y) b dy \cong \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{g}(y) dy = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(y_i) w_i \end{aligned} \quad (24)$$

onde

$$\mathbf{f}(y) = \mathbf{a}(y)^T \mathbf{S}(y) \mathbf{b} \quad \mathbf{g}(y) = \mathbf{a}(y)^T E_c(y) \mathbf{a}(y) \mathbf{b} \quad (25)$$

são funções que correspondem aos integrandos das eqs. (24). Observa-se que  $\mathbf{f}(y)$  é uma matriz coluna (dimensões  $2 \times 1$ ) e  $\mathbf{g}(y)$  é uma matriz quadrada de ordem 2.

O procedimento de integração numérica é bastante genérico, podendo ser utilizado para diversos tipos de relações constitutivas para o concreto e aço, e para diversos estados de deformação da seção (não apenas nos estados limites).

A maneira como tais integrais são calculadas, para cada um dos quatro métodos estudados neste trabalho, é mostrada nos itens seguintes.

#### 4.1. Método do Ponto Médio

As equações para o cálculo dos esforços e matriz de rigidez através do Método do Ponto Médio são as seguintes

$$\mathbf{F}_c \cong \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(y_i) \Delta h \quad \mathbf{k}_c \cong \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(y_i) \Delta h \quad (26)$$

Onde  $\Delta h$  corresponde a um peso de integração constante, dado pela divisão da altura  $h$  da seção pelo número de subdivisões  $n_d$  da seção

$$\Delta h = \frac{h}{n_d} \quad (27)$$

No caso do método do ponto médio o número de subdivisões da seção é igual ao número de pontos de integração ( $n = n_d$ ).

Como o método do ponto médio é uma fórmula de Newton-Cotes do tipo aberta, ele não considera os pontos extremos do intervalo de integração. Observa-se que tão mais preciso serão os resultados, quanto maior for o valor de  $n$ , e menor o valor de  $\Delta h$ . A figura 3 mostra um exemplo de divisão da seção para  $n = n_d = 8$

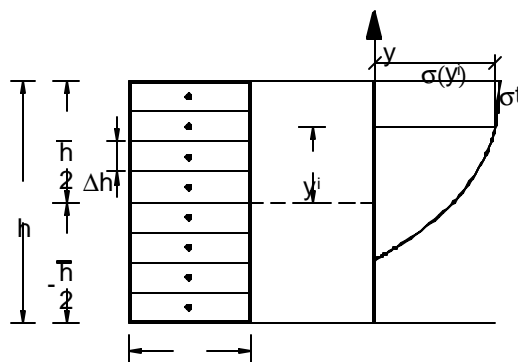


Figura 3 – Figura esquemática da divisão da seção pelo método do Ponto Médio.

#### 4.2. Método dos Trapézios

O método dos trapézios difere do método do ponto médio em um aspecto principal, já que corresponde a uma fórmula de Newton-Cotes do tipo fechada, ou seja, existem pontos de integração situados nos limites de integração. A determinação dos esforços e matriz de rigidez da seção, pelo método dos trapézios é feita da seguinte forma

$$\mathbf{F}_c \cong \frac{\Delta h \mathbf{b}}{2} \left[ \mathbf{f}(y_1) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \mathbf{f}(y_i) + \mathbf{f}(y_n) \right] \quad \mathbf{k}_c \cong \frac{\Delta h \mathbf{b}}{2} \left[ \mathbf{g}(y_1) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \mathbf{g}(y_i) + \mathbf{g}(y_n) \right] \quad (28)$$

Neste caso, o número total de pontos de integração é

$$n = n_d + 1 \quad (29)$$

A principal consequência da diferença entre os métodos do ponto médio e dos trapézios é que no segundo o peso não mais é igual para todos os pontos, assumindo um valor para os pontos intermediários e metade deste valor para os pontos extremos.

A figura 4 mostra um exemplo de divisão da seção para  $n_d = 8$ , para este método

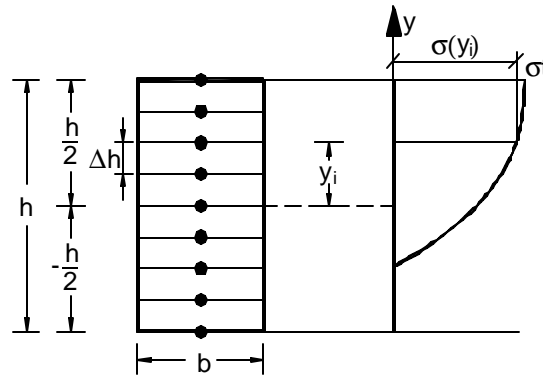


Figura 4 – Figura esquemática da divisão da seção pelo método dos Trapézios.

### 4.3. Método de Simpson

A idéia básica do método de Simpson consiste em aproximar o integrando por parábolas do 2º grau, utilizando-se três pontos de integração em cada subintervalo. Para o cálculo dos esforços resistentes na seção de concreto através do método de Simpson, tem-se

$$\mathbf{F}_c \cong \frac{\Delta hb}{6} \left[ \mathbf{f}(y_1) + 4 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \mathbf{f}(y_{2i}) + 2 \sum_{i=1}^{(n-1)/2-1} \mathbf{f}(y_{2i+1}) + \mathbf{f}(y_n) \right] \quad (30)$$

$$\mathbf{k}_c \cong \frac{\Delta hb}{6} \left[ \mathbf{g}(y_1) + 4 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \mathbf{g}(y_{2i}) + 2 \sum_{i=1}^{(n-1)/2-1} \mathbf{g}(y_{2i+1}) + \mathbf{g}(y_n) \right]$$

Neste caso, a relação entre o número total de pontos de integração e o número de subdivisões da seção é

$$n = 2n_d + 1 \quad (31)$$

### 4.4. Método de Gauss

O método da Quadratura de Gauss não se enquadra na classificação dos métodos descritos acima, e a sua principal diferença é que ele não mais divide o domínio de integração em intervalos iguais, como é feito nos métodos anteriores. Em consequência da divisão desigual, os pesos mudam de acordo com o número de pontos usados pelo somatório. As equações para o cálculo dos esforços resistentes e matriz de rigidez na seção de concreto, para o método da quadratura de Gauss assumem a seguinte forma

$$\mathbf{F}_c \cong \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(y_i) w_i \quad \mathbf{k}_c \cong \sum_{i=1}^n \mathbf{g}(y_i) w_i \quad (32)$$

com  $y_i$  e  $w_i$  sendo a coordenada e o peso de um ponto de integração  $i$ , facilmente calculados a partir de valores tabelados para os pontos de integração de Gauss nos intervalos usuais de [0;1] ou de [-1;1].

## 5. Relação Esforço-Deformação de uma seção

Neste item, considera-se uma seção em um estado de deformação não necessariamente correspondente a um estado limite último. Uma das fases do processo

de análise desta seção pode ser posto da seguinte forma: “Dadas as deformações  $e_{c_{max}}$  na parte mais comprimida do concreto (topo da seção) e  $e_s$  na armadura mais tracionada, pede-se determinar o esforço normal  $N$  e momento fletor  $M$ , (e a matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  da seção, caso seja necessário)”.

Observar-se que esta situação é genérica, e não implica necessariamente que a seção esteja em um estado de deformação delimitado pelos domínios de deformação (Domínios 1, 2, 3, 4, 4a, e 5, definidos na NBR-6118). Deve-se destacar que os domínios de deformação representam apenas uma situação de ruína, e que uma seção em um estado de deformação anterior a ruína encontra-se totalmente fora destes domínios de deformação.

Por exemplo, considera-se que uma coluna em concreto armado submetida a flexo-compressão reta esteja sendo estudada em laboratório, ou que esta coluna faça parte de um edifício ou ponte em construção e que está sendo instrumentada no campo.

Através da utilização de extensômetros elétricos (“*strain-gages*”) pode-se determinar as deformações unitárias  $e_t$  e  $e_b$  nas superfícies externas das faces da seção em concreto armado (base e topo da seção). As deformações generalizadas  $e_0$  e  $\mathbf{j}$  da seção podem ser facilmente determinadas através das eqs. (1).

Os esforços  $N$  e  $M$  da seção dependem da distribuição da tensão  $\mathbf{s}(y)$  ao longo da altura (eqs. (18)); a qual depende, através da relação constitutiva do material (eqs. (16) e (17)), da deformação  $\mathbf{e}(y)$ ; a qual, por sua vez, depende das deformações generalizadas  $e_0$  e  $\mathbf{j}$  (eq. (6)). Assim, pode-se dizer que os esforços  $N$  e  $M$  são uma função direta das deformações generalizadas  $e_0$  e  $\mathbf{j}$ . Matematicamente, isto pode ser representado como

$$\mathbf{e}(y) = \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}, y) = \mathbf{e}_0 - y\mathbf{j} = \mathbf{a}(y)\mathbf{e} \quad (33)$$

e

$$N = \tilde{N}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}) = \int_{A_c} \tilde{\mathbf{s}}_c(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}, y)) dA + \tilde{\mathbf{s}}_s(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}, y_s)) A_s + \tilde{\mathbf{s}}_s(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}, y'_s)) A'_s$$

$$M = \tilde{M}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}) = - \left( \int_{A_c} \tilde{\mathbf{s}}_c(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}, y)) y dA + \tilde{\mathbf{s}}_s(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}, y_s)) y_s A_s + \tilde{\mathbf{s}}_s(\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{e}_0, \mathbf{j}, y'_s)) y'_s A'_s \right) \quad (34)$$

ou de forma mais compacta, pode-se dizer que os esforços  $\mathbf{F}$  são uma função das deformações generalizadas  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{e}) = \int_A \mathbf{a}(y)^T \tilde{\mathbf{s}}_c(\mathbf{a}(y)\mathbf{e}) dA + \mathbf{a}(y_s)^T \tilde{\mathbf{s}}_s(\mathbf{a}(y_s)\mathbf{e}) A_s + \mathbf{a}(y'_s)^T \tilde{\mathbf{s}}_s(\mathbf{a}(y'_s)\mathbf{e}) A'_s \quad (35)$$

ou seja, dadas as deformações generalizadas  $\mathbf{e}$  da seção, pode-se obter os esforços  $\mathbf{F}$  correspondentes, avaliando-se a equação acima.

Da mesma forma, pode-se escrever a matriz de rigidez da seção em termos das deformações generalizadas.

$$\mathbf{k} = \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{e}) \quad (36)$$

## 6. Diagramas de Interação

O diagrama de interação para uma seção corresponde à relação entre os esforços resistentes na situação de estado limite último da seção. Em outras palavras, pode-se dizer que a superfície de interação limita a região em que uma seção pode trabalhar sem atingir a ruína (um ponto no interior da superfície encontra-se na área segura de trabalho).



O Diagrama de interação esforço normal – momento fletor pode ser obtido, utilizando-se a formulação matemática descrita anteriormente, fazendo-se variar as deformações  $e_{c_{max}}$  e  $e_s$  da seção, de forma a se “varrer” (percorrer) todos os domínios de deformação correspondentes aos estados limites últimos da seção (reta a, domínios 1, 2, 3, 4, 4a, e 5, e reta b). Desta forma, cada par  $(e_{c_{max}}, e_s)$  corresponde a um ponto  $(N, M)$  na superfície de interação;

Para determinar um ponto da superfície de interação adota-se o seguinte procedimento:

- 1) Definem-se as deformações  $e_{c_{max}}$  e  $e_s$  correspondente a um determinado domínio de deformação;
- 2) Obtem-se as deformações  $e_t$  e  $e_b$  através das eqs. (15);
- 3) Calculam-se as deformações generalizadas  $e_0$  e  $j$  da seção através das eqs. (1);
- 4) Calculam-se os esforços  $N$  e  $M$  atuantes na seção através das eqs. (18) ou (19). Este procedimento pode ser feito tanto analiticamente (FUSCO (1981)), quanto numericamente, conforme descrito abaixo:
  - 4.1) Para cada ponto  $i$  de integração com coordenada  $y_i$ , determina-se a deformação  $e(y_i)$  deste ponto através da eq. (2);
  - 4.2) Determina-se a tensão  $s(y_i)$  deste ponto através da relação constitutiva (16);
  - 4.3) Performa-se o somatório correspondente a integração numérica através da primeira das eqs. (24), utilizando-se qualquer um dos métodos de integração numérica apresentados;

## 7. Métodos para obtenção de raízes

A obtenção de curvas esforços-deformações (como por exemplo, o diagrama momento-curvatura) consiste na solução de um problema de determinação de raiz de uma função não-linear. Para isto, diversos métodos de determinação de raízes podem ser utilizados tais como os Métodos da Bisseção e Método de Newton (Burden, R. L., Faires, J. D (1993)).

Sabe-se que o Método de Newton (ou de Newton-Raphson) é um dos métodos mais eficientes para obtenção de raízes. Este foi um dos métodos utilizados neste trabalho, e é descrito sucintamente a seguir, para o caso geral de funções vetoriais de várias variáveis.

### 7.1. Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson consiste em um processo iterativo para a determinação de raízes de funções não-lineares. Para utilização do método se faz necessário a avaliação da função e da sua derivada primeira, conforme descrito a seguir.

Seja uma função vetorial qualquer escrita na forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (37)$$

onde  $\mathbf{x}$  é um vetor com as variáveis do problema. O problema consiste em se determinar as raízes  $\mathbf{x}_r$  que satisfaçam a eq. (37). A partir de uma tentativa inicial  $\mathbf{x}^{(j)}$  pode-se obter uma melhor aproximação  $\mathbf{x}^{(j+1)}$  para as raízes fazendo-se

$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(j)})^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(j)}) \quad (38)$$

onde

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(j)}) = \left. \frac{\partial \mathbf{H}(x)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(j)}} \quad (39)$$

é a matriz jacobiana (derivadas da função  $\phi$  em relação a  $\mathbf{x}$ ) avaliada em  $\mathbf{x}^{(j)}$ .

O processo iterativo deve ser realizado até que o erro relativo (por exemplo, uma norma da diferença entre duas soluções consecutivas  $\mathbf{x}^{(j)}$  e  $\mathbf{x}^{(j+1)}$ ) seja menor do que uma tolerância pré-estabelecida.

## 8. Curvas esforço-deformação (trajetória de equilíbrio) de uma seção

No item 5, demonstrou-se que pode-se determinar os esforços  $\mathbf{F}$  a partir das deformações generalizadas  $\mathbf{e}$  da seção (eq. (35)). No entanto, em muitas situações, necessita-se justamente fazer o inverso, ou seja, dadas as forças externas ou solicitantes  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  atuantes na seção (conhecidas), se faz necessário determinar as respectivas deformações generalizadas  $\mathbf{e}$  provocadas pelo carregamento externo. Isto é importante quando se precisa obter as curvas esforços-deformações (trajetória de equilíbrio) de uma determinada seção.

A solução do problema consiste em se resolver a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{F}_{\text{des}}(\mathbf{e}) = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}(\mathbf{e}) = \mathbf{0} \quad (40)$$

onde  $\mathbf{F}_{\text{des}}(\mathbf{e})$  representa o desequilíbrio (diferença) entre as forças externas (ou solicitantes) conhecidas  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  e as forças internas (ou resistentes)  $\mathbf{F}(\mathbf{e})$ . Para a solução da eq. (40), deve-se determinar as raízes  $\mathbf{e}_r$  que zeram a função  $\mathbf{F}_{\text{des}}(\mathbf{e})$ , o que pode ser feito utilizando-se o Método de Newton descrito na seção 7.1, onde a função  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  é substituída por  $\mathbf{F}_{\text{des}}(\mathbf{e})$ , tal que

$$\mathbf{e}^{(j+1)} = \mathbf{e}^{(j)} - \mathbf{J}(\mathbf{e}^{(j)})^{-1} \mathbf{F}_{\text{des}}(\mathbf{e}^{(j)}) \quad (41)$$

com

$$\mathbf{J}(\mathbf{e}) = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{des}}(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{e}} - \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{0} - \mathbf{k}(\mathbf{e}) = -\mathbf{k}(\mathbf{e}) \quad (42)$$

ou seja, neste caso a matriz jacobiana é a matriz de rigidez da seção com o sinal trocado. Assim, o processo iterativo, para cálculo das deformações generalizadas da seção, fica

$$\mathbf{e}^{(j+1)} = \mathbf{e}^{(j)} + \mathbf{k}(\mathbf{e}^{(j)})^{-1} (\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}(\mathbf{e}^{(j)})) \quad (43)$$

Resolvendo-se o problema para um vetor de forças externas conhecidas  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ , obtém-se as respectivas deformações  $\mathbf{e}_r$ , definindo-se portanto um ponto na trajetória de equilíbrio da seção. Para obtenção da trajetória de equilíbrio completa, considera-se um novo valor de  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  (novo passo de carga), calcula-se novas deformações, e assim por diante. Deve-se destacar, que dependendo do formato da trajetória de equilíbrio, pode ser necessário utilizar métodos mais robustos para a solução do problema não linear, tais como o Método do Comprimento de Arco (CLARKE e HANCOCK (1990)), por exemplo.

### 8.1. Diagrama momento-curvatura

O diagrama momento-curvatura de uma seção referente a um valor fixo de carregamento normal  $N_{\text{ext}}$  (esforço normal externo ou solicitante) pode ser obtido da seguinte maneira: escolhe-se um determinado valor de curvatura  $j$ , e determina-se qual o valor de  $\mathbf{e}_0$ , tal que  $j$  e  $\mathbf{e}_0$  “gerem” um esforço normal interno ou resistente  $N$  (calculado através da primeira das eqs. (24)) que equilibre o esforço normal externo ou solicitante.

Portanto, deve-se resolver um problema de obtenção da raiz de uma função escalar, dada pela diferença do esforço normal solicitante ou externo  $N_{\text{ext}}$  com o esforço normal resistente ou interno  $N$ .

$$N_{\text{des}}(\mathbf{e}_0) = N_{\text{ext}} - N(\mathbf{e}_0) = 0 \quad (44)$$

onde  $N_{\text{des}}(\mathbf{e}_0)$  representa o desequilíbrio entre as forças solicitante e resistente.

Deve-se esclarecer que na equação acima  $N$  é escrito como função de  $\mathbf{e}_0$  apenas, pois a curvatura  $\mathbf{j}$  é mantida fixa (conhecida) na obtenção de um determinado ponto do diagrama momento-curvatura.

A solução do problema através do Método de Newton consiste em se fazer

$$\mathbf{e}_0^{(j+1)} = \mathbf{e}_0^{(j)} - \left( \frac{\partial N_{\text{des}}(\mathbf{e}_0)}{\partial \mathbf{e}_0} \Big|_{\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0^{(j)}} \right)^{-1} N_{\text{des}}(\mathbf{e}_0^{(j)}) \quad (45)$$

com, a derivada da função sendo

$$\frac{\partial N_{\text{des}}(\mathbf{e}_0)}{\partial \mathbf{e}_0} = \frac{\partial N_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{e}_0} - \frac{\partial N(\mathbf{e}_0)}{\partial \mathbf{e}_0} = 0 - k_{11}(\mathbf{e}_0) = -k_{11}(\mathbf{e}_0) \quad (46)$$

ou seja, a derivada da função é igual a componente (1,1) da matriz de rigidez da seção com sinal trocado (ver eq. (9)). Assim, a eq. (45) pode ser escrita como

$$\mathbf{e}_0^{(j+1)} = \mathbf{e}_0^{(j)} + \frac{1}{k_{11}(\mathbf{e}_0^{(j)})} \left( N_{\text{ext}} - N(\mathbf{e}_0^{(j)}) \right) \quad (47)$$

Em resumo, com um esforço normal  $N$  especificado, pode-se obter um ponto do diagrama momento-curvatura, escolhendo-se um valor para curvatura  $\mathbf{j}$ ; determinando-se  $\mathbf{e}_0$  iterativamente através da eq. (47); e calculando-se o momento fletor  $M(\mathbf{e}_0, \mathbf{j})$  através da eq. (34).

Fazendo-se variar o valor da curvatura de zero até um determinado valor máximo, para um incremento apropriado, e repetindo-se o processo acima obtém-se todo o diagrama momento-curvatura para um determinado valor de esforço normal.

## 9. Exemplos e comparações

Os procedimentos descritos neste trabalho foram implementados através da plataforma *MATLAB*.

Nesta seção são apresentados os resultados de diversos testes numéricos realizados para validação dos procedimentos propostos. São feitas comparações entre a solução analítica e soluções numéricas, assim como são realizadas algumas análises de convergência para estudo de desempenho e eficiência numérica dos métodos apresentados.

Também é mostrada a utilização dos programas em alguns problemas práticos da engenharia estrutural.

Nos diversos exemplos apresentados utilizou-se como relação constitutiva para o concreto e aço, respectivamente, o diagrama parábola-retângulo e o diagrama bilinear para o aço tipo A, de acordo com a NBR-6118.

Na apresentação dos resultados utilizam-se os valores normalizados adimensionais  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  do esforço normal  $N_d$  e momento fletor  $M_d$  de projeto, respectivamente (Fusco 1981)

$$\mathbf{n} = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad \text{e} \quad \mathbf{m} = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}} \quad (48)$$

onde  $f_{cd}$  é a resistência à compressão de projeto do concreto. A quantidade de armadura é expressa pela taxa mecânica

$$w = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} \quad (49)$$

onde  $f_{yd}$  é a resistência à tração de projeto do aço. Nesta equação  $A_s$  corresponde à área total de aço na seção.

### 9.1. Análise de Convergência dos Métodos de Integração

Os resultados mostrados a seguir foram obtidos para uma seção de concreto com resistência de 20MPa, aço CA-50A, taxa mecânica de armadura  $w = 0,4$  (armadura dupla simétrica), que equivale a taxa de armadura de 1,314% e com  $d'/h = 0,1$ .

Para um determinado par de deformações  $e_{c_{max}}$  e  $e_s$  foram calculados os esforços na seção de acordo com o item 5, e feita uma análise de convergência para diversas ordens de integração. A análise de convergência mostrada nas figuras 5 e 6 refere-se às deformações  $e_{c_{max}} = 0,0035$  e  $e_s = e_{yd}$  (deformação de escoamento do aço), correspondentes ao limite entre os domínios 3 e 4.

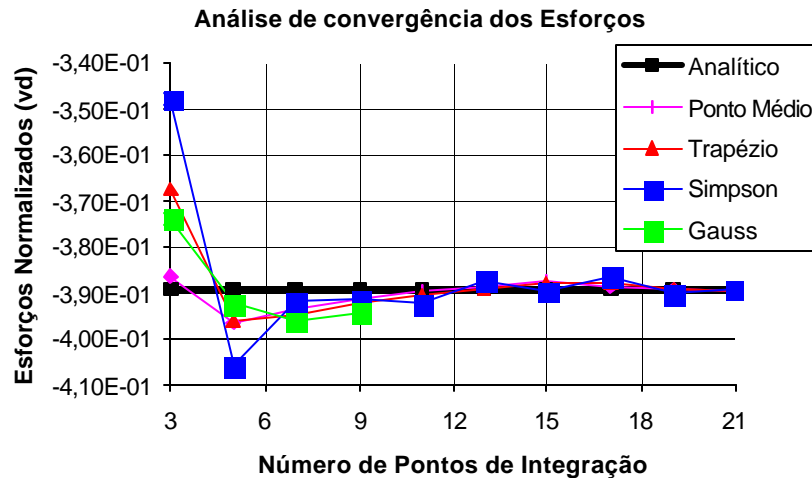


Figura 5 – Análise de convergência dos métodos de integração para esforço normal.

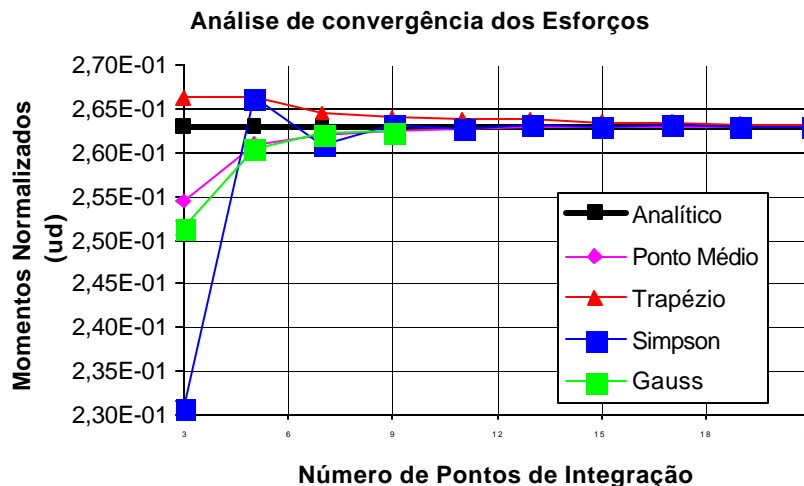


Figura 6 – Análise de convergência dos métodos de integração para momento fletor.

Em relação à determinação do esforço normal ilustrada na Figura 5, observou-se que o método que apresentou melhor convergência foi o método do Ponto Médio. Este proporcionou um resultado com 4 dígitos corretos para 19 pontos de integração. Os demais métodos só apresentaram o mesmo nível de precisão com a utilização de 21 pontos de integração.

Em relação à determinação do momento fletor, ilustrado na Figura 6, observou-se que os métodos que apresentaram melhores resultados foram o método do Ponto Médio e o método de Simpson, ambos com bom nível de precisão com 15 pontos de integração. Já o método dos Trapézios só veio a apresentar os mesmos resultados com 19 pontos de integração.

## 9.2. Diagramas de Interação

Foram determinados para a seção descrita anteriormente, os diagrama de interação esforço normal – momento fletor, utilizando-se as diversos técnicas de quadratura, com várias ordens de integração.

### 9.2.1. Comparação entre as curvas do diagrama de interação obtidas analiticamente e pelo método do Ponto Médio.

O diagrama de interação mostrado na Figura 7 corresponde à seção descrita anteriormente, e foi obtido através do método do Ponto Médio, com número de pontos de integração iguais a 1, 2 e 3.

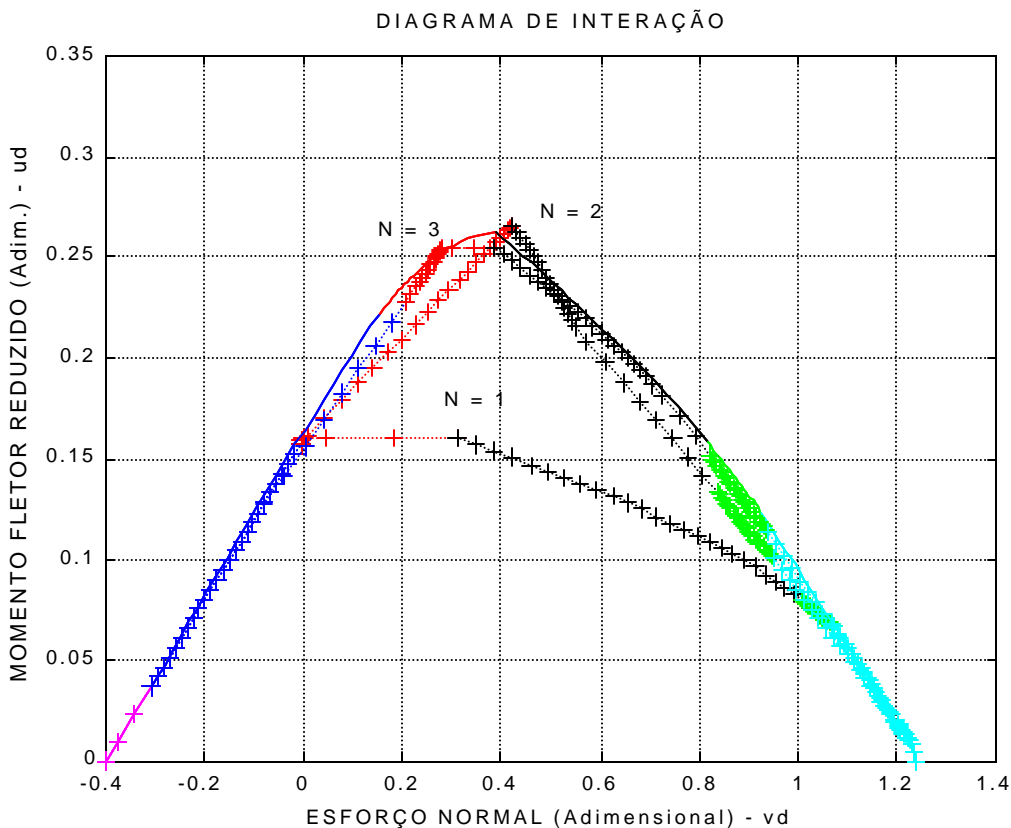


Figura 7 – Comparação das curvas geradas analiticamente e pelo método do Ponto Médio, para 1, 2 e 3 pontos de integração.

Como era de se esperar, observa-se na Figura 7, que para apenas 1 e 2 pontos de integração o método do Ponto Médio não apresenta uma boa precisão, mostrando resultados razoavelmente precisos já para 3 pontos de integração. Entretanto, observa-se que mesmo com pouquíssimos pontos de integração, os resultados referentes ao domínio

1 (magenta) e parte do domínio 2 (azul escuro) são muito precisos, devido ao fato das armaduras de aço resistirem totalmente aos esforços. Ainda, no domínio 5 (azul claro), devido ao fato de toda a seção transversal estar comprimida (com pequena variação das tensões de compressão), os resultados são bastante precisos mesmo com apenas um ou dois pontos de integração. O diagrama também é gerado (Figura 8) utilizando-se 9 pontos de integração, para possibilitar a verificação da precisão do Método do Ponto Médio.

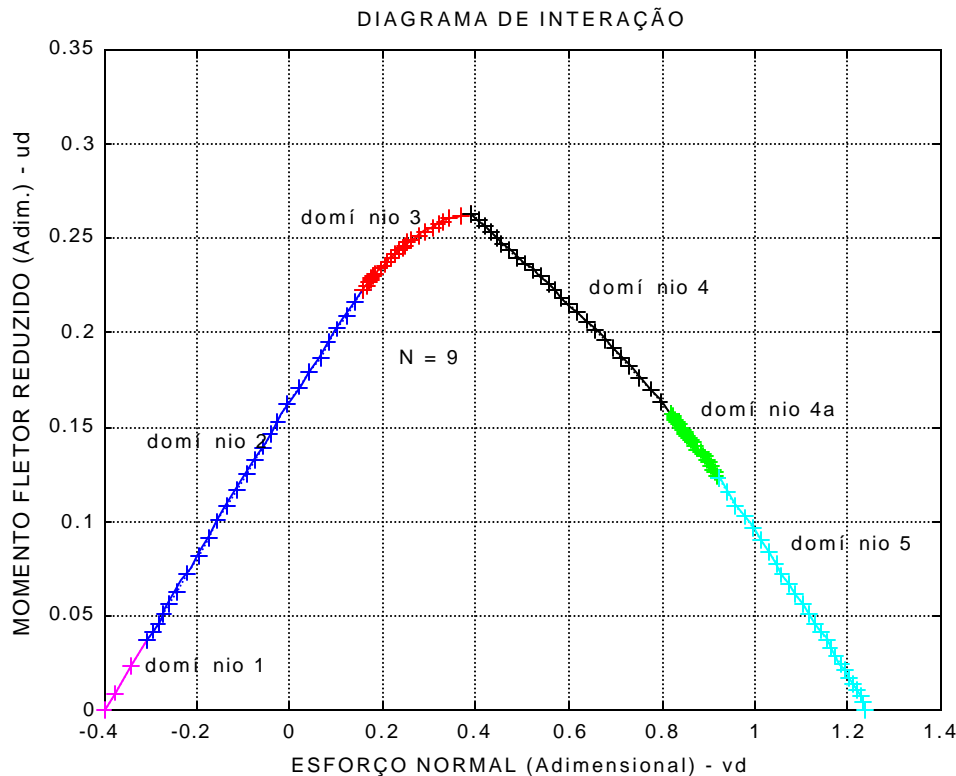


Figura 8 – Ajuste da curva gerada pelo Método do Ponto Médio para 9 pontos de integração.

### 9.2.2. Comparação entre as curvas do diagrama de interação obtidas analiticamente e através dos Métodos de integração apresentados.

O diagrama mostrado na Figura 9 é gerado para a mesma seção anterior, utilizando-se os vários métodos de integração discutidos neste trabalho. Isto é feito a fim de permitir uma comparação entre a precisão dos diversos métodos. A Fig. 10 mostra um detalhe do trecho de maior divergência no diagrama da Fig. 9.

## 9.3. Curvas esforço-deformação (trajetórias de equilíbrio) da seção

Apresenta-se as curvas esforço-deformação (trajetórias de equilíbrio) da seção para dois tipos de carregamento, descritos a seguir.

### 9.3.1. Curvas esforço-deformação para carga concentrada variável com excentricidade fixa

A seguir apresenta-se a simulação numérica do comportamento da seção anterior quando submetida a uma carga progressiva de compressão aplicada com uma excentricidade constante de 10 cm. Nesta situação, a medida que a carga vertical é incrementada, como a excentricidade é constante, o momento fletor também aumenta na mesma proporção da carga. Esta simulação é feita neste estudo porque representa um importante tipo de teste realizado em laboratório, também ocorrendo em algumas situações práticas. A técnica de integração empregada foi o Método do ponto médio.

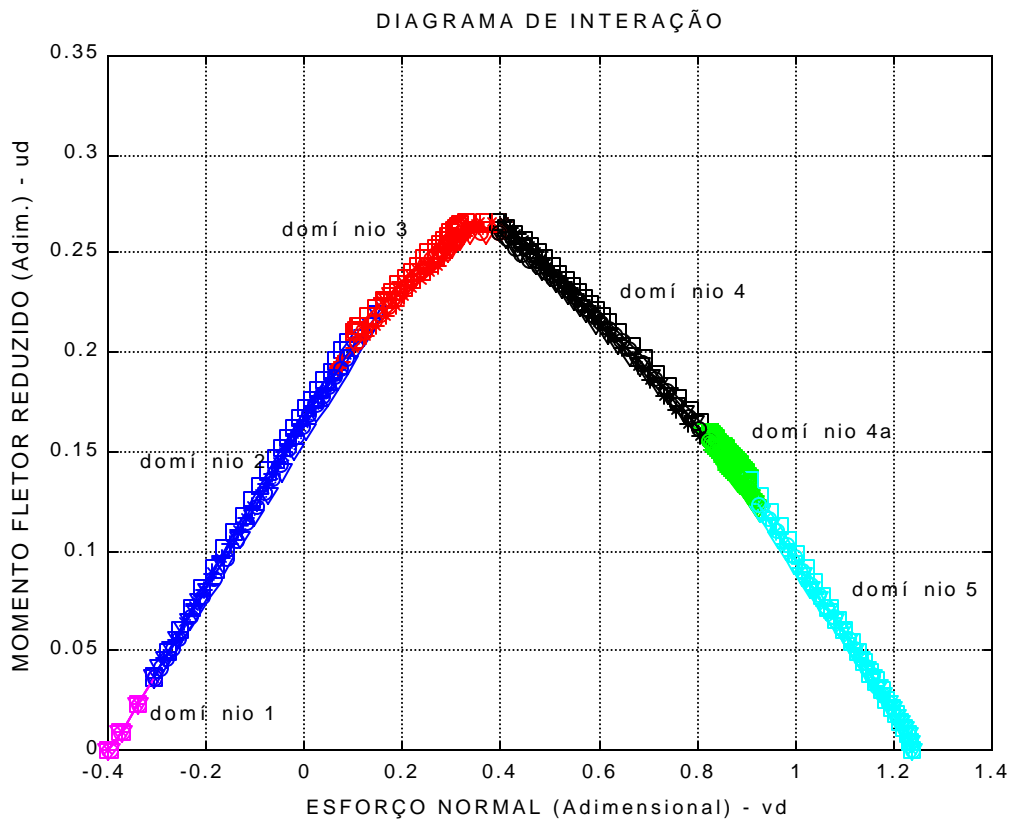


Figura 9 – Comparação da curva gerada pelo Método Analítico e as curvas geradas pelos Métodos de Integração Numérica.

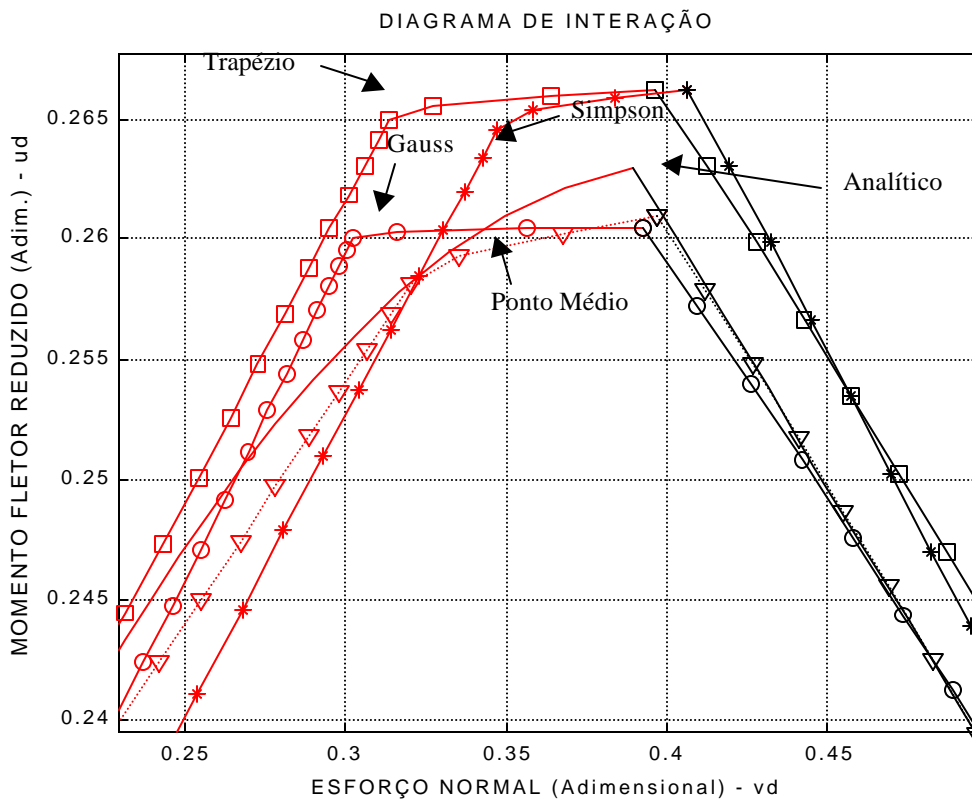


Figura 10 – Detalhe mostrando as diferenças entre as curvas da Figura 9

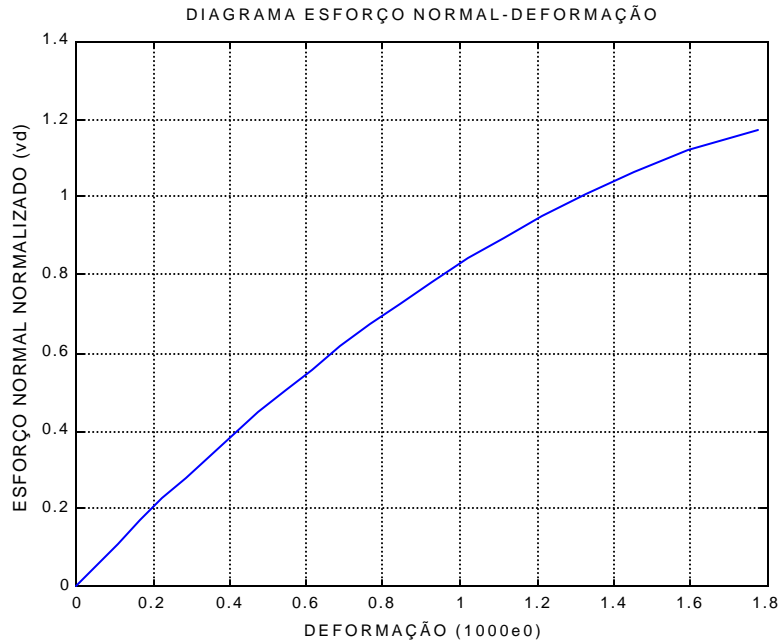


Figura 11 – Diagrama esforço normal – deformação normal para carga variável com excentricidade fixa.

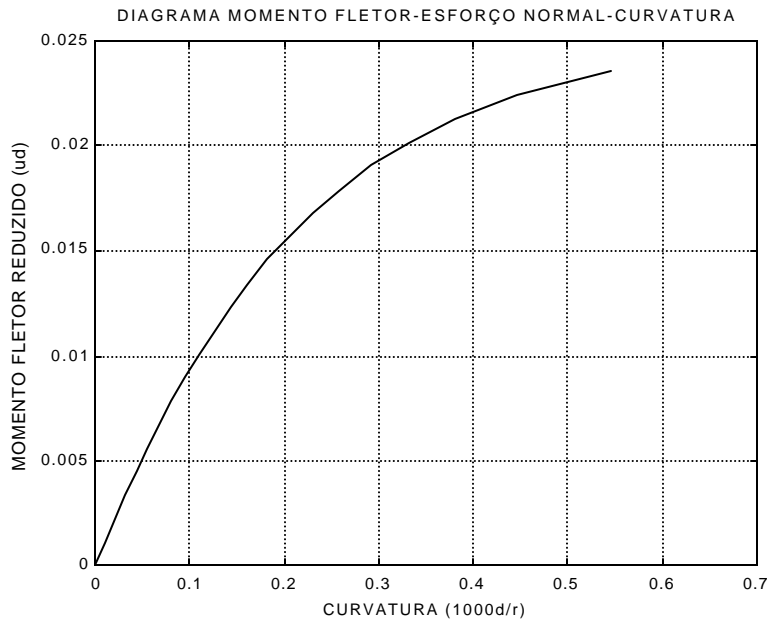


Figura 12 – Diagrama momento curvatura para carga variável com excentricidade fixa.

### 9.3.2. Diagrama momento-curvatura para esforço normal constante

Os diagramas obtidos neste caso referem-se a uma seção com resistência de 20MPa, aço CA-50A, taxa mecânica de armadura  $\omega = 0,2435$ , a qual equivale a taxa de armadura de 0,8% e  $d'/h = 0,05$ , com número de pontos de integração igual a 10.

A Figura 13 apresenta diagramas momento-curvatura para diversos valores de  $v$  (variando de 0,0 a 1,0). Na análise, foram utilizados os métodos de Gauss (em azul) e Ponto Médio (em vermelho).



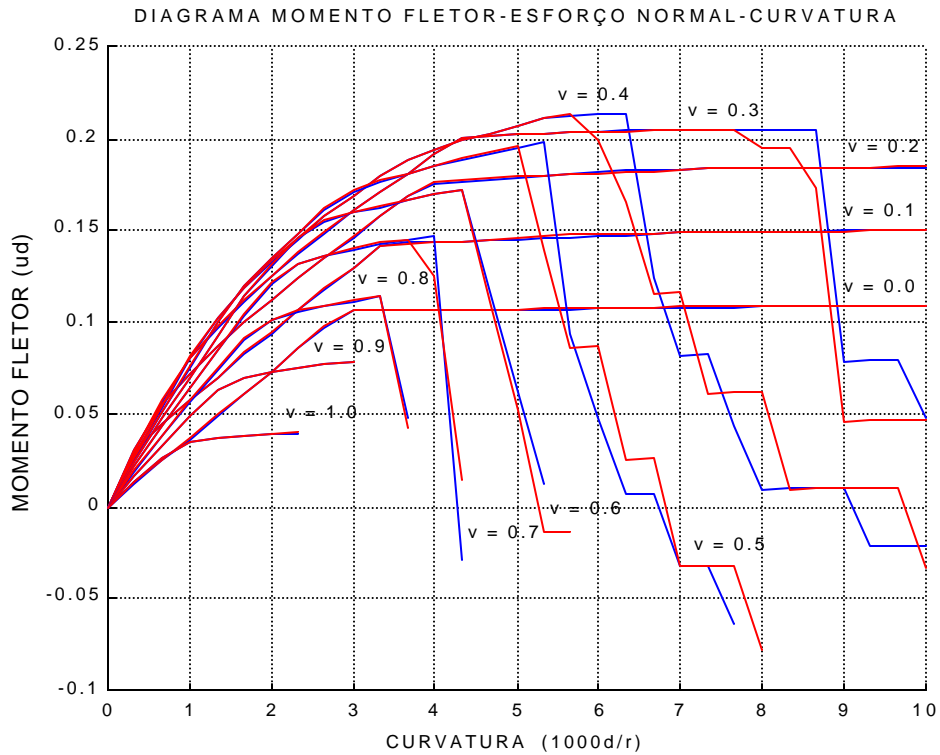


Figura 13 – Diagramas momento-curvatura, para  $\nu$  variando de 0 a 1,0, obtidas pelos métodos de Gauss e Ponto Médio com 10 pontos de integração.

A Figura 14 apresenta os mesmos tipos de resultados, porém utilizando-se apenas o Método do Ponto Médio com 40 pontos de integração. O ponto a partir do qual as curvas decrescem representa o início da perda de resistência da seção, devido ao esmagamento do concreto na parte superior da seção.

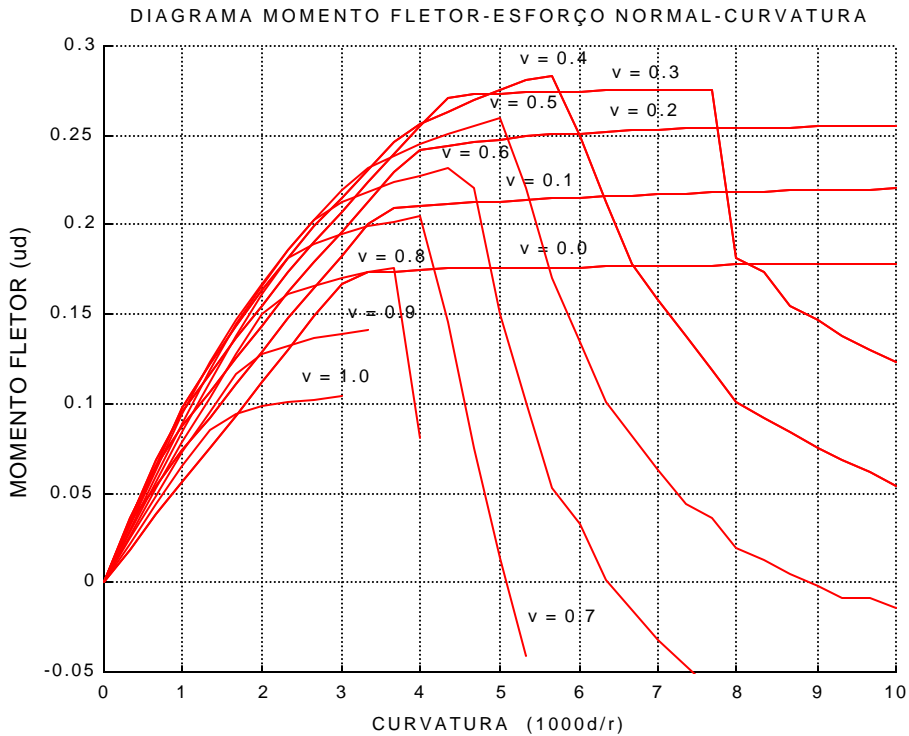


Figura 14 – Diagramas momento-curvatura, para  $\nu$  variando de 0 a 1,0, obtidas pelo método do Ponto Médio com 40 pontos de integração

## 9.4. Determinação de deslocamentos em vigas

O objetivo desta aplicação é ilustrar como pode-se determinar precisamente o deslocamento em vigas ou colunas de concreto armado, utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, o qual se aplica a qualquer tipo de material (não necessariamente linear-elástico). O Princípio das Forças Virtuais pode ser escrito como

$$\bar{P}d = \int_l \mathbf{j}(x) \bar{M}(x) dx + \int_l \mathbf{e}_0(x) \bar{N}(x) dx \quad (50)$$

onde  $d$  é o deslocamento que se deseja determinar,  $\bar{P}$  é a força virtual (geralmente unitária) aplicada no ponto onde se deseja determinar o deslocamento,  $\bar{M}(x)$  e  $\bar{N}(x)$  são os esforços virtuais causados pela carga virtual, e  $\mathbf{j}(x)$  e  $\mathbf{e}_0(x)$  são as deformações generalizadas reais, e  $l$  é o comprimento da viga. Neste estudo, despreza-se as deformações relacionadas com o efeito de cisalhamento.

### 9.4.1. Cálculo do deslocamento de uma viga engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído

Neste exemplo considera-se uma viga engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído, conforme ilustra a Figura 15. Adotam-se os seguintes dados para a seção: resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) igual a 20Mpa, Aço CA-50A, Seção de 15cm×50cm,  $d' = 2,5\text{cm}$ , e taxa mecânica de armadura  $w = 0,4$  (armadura dupla simétrica). O carregamento considerado foi  $q = 0,9\text{Tf/m}$ .

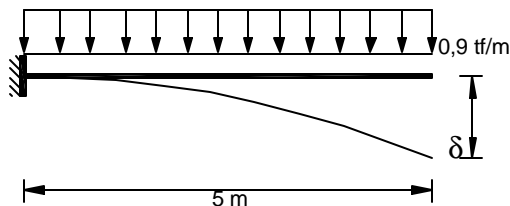


Figura 15 – Esquema estático de carregamento.

O deslocamento  $d$  na extremidade da viga foi calculado de duas formas distintas:

a) Através da solução analítica da resistência dos materiais para viga de material linear

elástico  $d = \frac{ql^4}{8EI}$ . Neste caso a rigidez a flexão  $EI$  da seção, foi obtida a partir do trecho

linear do diagrama momento curvatura conforme indicado na Figura 16. O resultado obtido desta forma foi  $d = 4,635\text{cm}$ .

b) Através do princípio das forças virtuais (eq. (50)), considerando o diagrama momento-curvatura da seção. Neste caso, as integrais ao longo do comprimento da viga foram avaliadas numericamente utilizando o método de Gauss, com 10 pontos de integração. O resultado obtido desta forma foi  $d = 5,467\text{cm}$ .

A figura 17 apresenta esquematicamente os diagramas de momento fletor e de curvatura da viga, indicando esquematicamente a posição dos pontos de integração de Gauss.

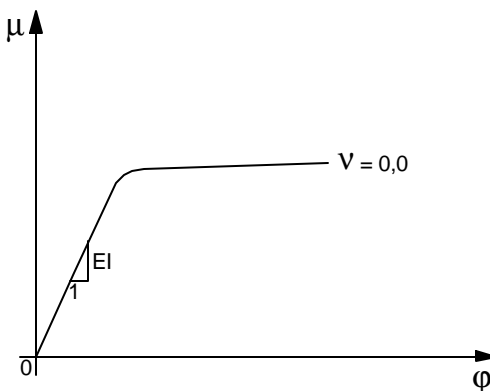


Figura 16 – Determinação da rigidez a flexão da seção a partir do diagrama momento-curvatura.

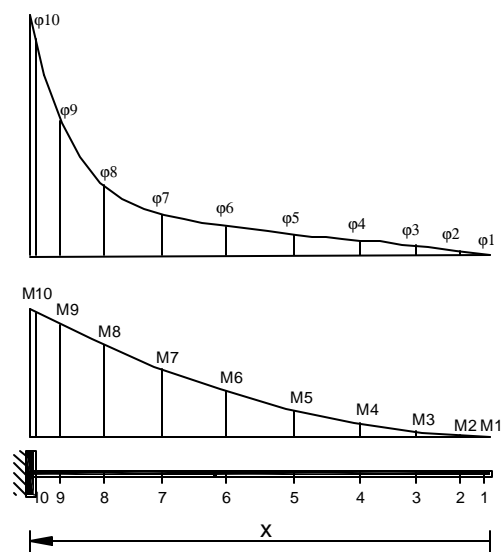


Figura 17 – Diagramas de momento fletor e curvatura.

## 10. Conclusões

Através dos resultados obtidos neste trabalho verifica-se a importância da utilização de métodos de integração numérica e obtenção de raízes na análise de seções de concreto armado submetidas a solicitações normais.

Quanto à análise de convergência dos métodos de integração numérica, constatou-se que o método do Ponto Médio foi o que melhor convergiu na média, seguido pelo método dos Trapézios. Pode-se concluir que todos os métodos se mostraram apropriados para a análise de seções de concreto armado.

Quanto ao cálculo das deformações em vigas observou-se que para deformações no regime elástico as equações da resistência dos materiais são bastante precisas, porém para deformações fora do regime elástico tais equações podem levar a erros substanciais.

Embora se tenham utilizado neste artigo apenas as relações constitutivas da NBR-6118, o programa desenvolvido apresenta grande versatilidade no que diz respeito às relações constitutivas que podem ser empregadas. Além disso, o programa pode ser facilmente alterado para análises de seções de outras formas, não necessariamente retangulares.

## 11. Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118**. Procedimento para Projeto e Execução de obras de concreto armado.

ALVES, E. G. **Diagramas de Integração para o Dimensionamento de Pilares Esbeltos e Seções de Concreto de Alta Resistência**. Dissertação de Mestrado Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, RJ, 2000

BRONDUM-NIELSEN, T. **Ultimate Flexural Capacity of Cracked Polygonal Concrete Sections under Biaxial Bending**. ACI J., 82(6), 863-869, 1985.

BURDEN, R. L., FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**, quinta edição, PWS-KENT Publishing Company. Boston, 1993

BURGOYNE, C. J., CRISFIELD, M. A. **Numerical Integration Strategy for Plates and Shells**, Int. J. Num. Meth. Engng., 29, 105-121, 1990.

CLARKE, M. J., HANCOCK, G. J. **A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analyses**, Int. J. Num. Meth. Engng. 29, 1365-1391, 1990.

DALL'ASTA, A., DEZI, L. **Design of RC Sections with Generic Shape under Biaxial Bending**. J. of Struct. Engng. ASCE, 118, n. 4, 1138-1143, 1992.

DUMONT, N. A. et al **Ábacos para o Dimensionamento de Seções de Concreto Armado sob Flexão Composta Reta e Oblíqua**. Relatório Interno, RI 02/87, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio (1987)

FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto: Solicitações Normais**. Livros Técnicos e Científicos Editora. São Paulo, 1981.

MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M. **Concrete – Microstructure, Properties, and Materials**. Segunda Edição, New York, McGrawHill, 1993.

MUSSO JR., F. **Dimensionamento de Seções de Concreto Armado e Verificação da Estabilidade de Vigas-Colunas no Estado Limite**. Dissertação de Mestrado Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, RJ, 2000

PARCHE, S. **A Fibre Model to Simulate the Cross-sectional behaviour of Reinforced Concrete Columns under Multi-directional Earthquake Loading**. Computer and Structures 77, 403-411, 2000.

SUSSEKIND, J.C. **Curso de Concreto: concreto armado**. Vol. I. 6ª Edição. Editora Globo. São Paulo, 1989.