

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM CABOS CONSIDERANDO A RIGIDEZ À FLEXÃO, A RIGIDEZ AO CÍSLHAMENTO E A INÉRCIA À ROTAÇÃO DA SEÇÃO

Rafael Araujo de Sousa

Remo Magalhães de Souza

José Perilo da Rosa Neto

rfldesousa@hotmail.com

remo@ufpa.br

perilo@ufpa.br

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil

Gandhy Yeddo da Rocha Aranha Júnior

gandhy@ufpa.br

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Federal do Pará,
Belém, Pará, Brasil

***Abstract.** O objetivo deste trabalho é analisar a influência da rigidez à flexão, ao cisalhamento e a inércia à rotação no comportamento mecânico de cabos condutores de linhas aéreas de transmissão, comparando-se os resultados com uma corda vibrante, onde se considera apenas a rigidez geométrica. Foram desenvolvidos cinco tipos de formulação, baseadas nas Teorias de viga de Bernoulli e de Timoshenko, e fazendo diferentes combinações de consideração de efeitos, tais como rigidez geométrica, rigidez a flexão, rigidez ao cisalhamento, e inércia a rotação. Em todas as cinco formulações considerou-se o cabo inextensível axialmente. As equações de movimento da corda vibrante foram desenvolvidas analiticamente, sendo consideradas apenas pequenas deformações, com as frequências naturais referentes a teoria de Bernoulli e Timoshenko sendo determinadas pelo método numérico de Newton-Raphson para solução de equações não-lineares. Os resultados são comparados com uma formulação publicada na literatura, que considera somente a rigidez à flexão..*

Keywords: *vibrações, cabos, deformações, cisalhamento*

1. INTRODUÇÃO

A análise de estruturas constituídas por barras é um assunto bastante complexo e vasto. Basicamente, esse tipo de análise envolve a adoção de um modelo de viga, os quais foram inicialmente estudados a partir do século XVII, conforme relata Yojo (1993).

De acordo com Irvine (1981), credita-se a Galileu no século XVII os primeiros estudos da forma curva de um cabo suspenso sob o seu próprio peso. Sua contribuição se restringiu a apontar a similaridade entre esta curva e uma parábola. Em 1691 um grupo de geógrafos e matemáticos obteve a solução desta curva que é hoje conhecida como catenária.

Uma revisão histórica do problema de vibração em cordas foi apresentada por Bassalo (1996). Ele destaca que nos anos de 1732 a 1733 Daniel Bernoulli, filho de John Bernoulli, fez estudos sobre pequenas vibrações de uma corda de peso desprezível, pendurada em uma extremidade e carregada com várias massas igualmente espaçadas. Outro fato citado por Bassalo (1996) é que Daniel também trabalhou com cordas vibrantes suspensas de espessura não uniforme.

É citado por Bassalo (1996) que D'Alembert em 1746 publicou dois trabalhos relacionados com o problema de vibrações de cordas, o primeiro deles sobre a forma tomada por uma corda tensa em vibração. Nos trabalhos, ele chegou à equação diferencial parcial da corda vibrante. Já em 1748, Euler apresentou um trabalho sobre a equação diferencial da corda vibrante.

Uma aplicação importante na área de vibrações de cabos, que resultou em diversos estudos e publicações é o comportamento vibratório dos cabos em linhas aéreas de transmissão de energia elétrica.

Ervik et al (1979) realizaram investigações sobre a durabilidade dos cabos suspensos das linhas de transmissão de energia elétrica, com testes de laboratório e medidas nas próprias linhas. Foi apresentado um método para a determinação do tempo de vida dos condutores.

Jordan (1985) apresentou um estudo sobre o comportamento dinâmico de um vão de linha de transmissão de energia elétrica, com extremos apoiados ou engastados. A análise é realizada com o emprego do método das matrizes de transferência. Neste trabalho o autor leva em consideração o efeito da rigidez à flexão dos cabos.

Ervik et al (1986) apresentaram uma revisão sobre os aspectos teóricos mais relevantes das vibrações eólicas, tais como a energia do vento, o auto-amortecimento dos condutores, níveis de vibração, efeitos da tensão nos cabos e da turbulência, além de um estudo sobre o caráter aleatório do vento e da natureza do vento. Cabe também destacar os anexos apresentados no artigo que tratam de expressões analíticas para o cálculo dos níveis de vibração dos condutores.

Diana et al (1993) apresentaram uma aproximação analítica para definição do comportamento dinâmico de cabos sujeitos a condição de turbulência causada por desprendimento de vórtices. A simulação é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, onde os efeitos dos vórtices são reproduzidos por meio de oscilações não-lineares equivalentes.

Freire (1997) estudou o problema das vibrações eólicas de condutores singelos em linhas aéreas de transmissão de energia elétrica, empregando uma modelagem não-linear para atender as exigências do problema.

Aranha Júnior e de Souza (2004-b) apresentaram um elemento finito de barra para análise estática e dinâmica não-linear geométrica, com a finalidade de estudar o comportamento dinâmico dos cabos de linhas aéreas de transmissão. Neste trabalho mostra-se o tratamento de cargas distribuídas através da formulação co-rotacional.

A determinação das frequências naturais de uma estrutura são uma das principais etapas da análise dinâmica estrutural, pois estas servem como parâmetro delimitador da frequência de excitação do carregamento externo. Com isto, pode-se evitar a ocorrência da ressonância, a qual consiste em um fenômeno onde a frequência de excitação se iguala a frequência natural, aumentando consideravelmente os deslocamentos da estrutura e conseqüentemente as tensões no material.

Tradicionalmente, no estudo de vibrações de cabos de linhas de transmissão, são consideradas as rigidezes geométricas (devida a força de tração no cabo) e, em algumas situações, a rigidez a flexão da seção. Entretanto, é importante analisar a influência de outras características da seção do cabo, além da rigidez geométrica, buscando-se desta maneira uma solução mais precisa para a determinação das frequências naturais da estrutura.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ACORDO COM A TEORIA DE VIGA DE TIMOSHENKO

A teoria de viga de Timoshenko é baseada na hipótese de que as seções transversais da viga permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo de referência, após a deformação da estrutura.

Neste trabalho, a teoria se aplica a análise de um cabo tracionado sujeita a flexão. A formulação mais geral apresentada para o cabo considera a rigidez geométrica (efeito da força axial), a rigidez à flexão, ao cisalhamento e a inércia à rotação.

A Fig. 1 apresenta o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal do cabo, de ordenada x , em um instante t .

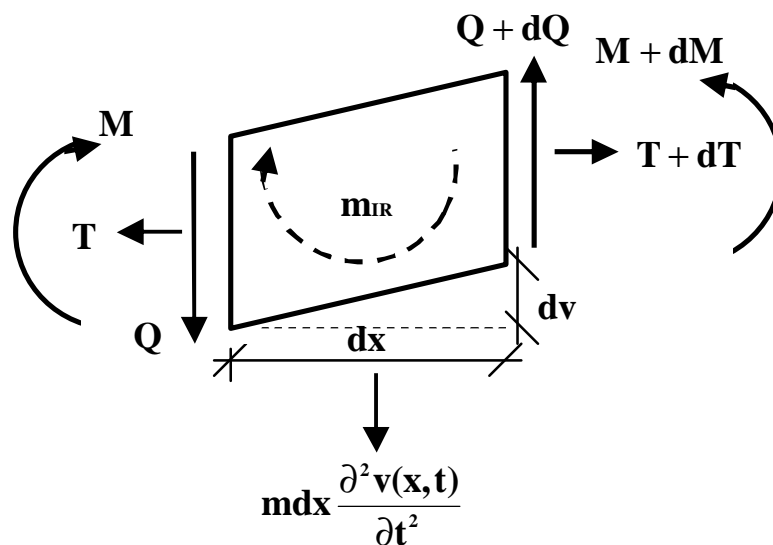


Figura 1 – Elemento infinitesimal considerando a inércia à rotação.

Considerando o cabo inextensível, tem-se impondo equilíbrio no elemento infinitesimal mostrado na Fig. 1, onde T é a força de tração no cabo, m é massa por unidade de comprimento, Q é o esforço cortante, M é o momento fletor, dx é o comprimento do elemento infinitesimal, dv é o incremento de deslocamento vertical e m_{IR} é a inércia à rotação. A expressão utilizada para determinação da inércia a rotação é

$$m_{IR} = \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

com A sendo a área da seção transversal, m a massa por unidade de comprimento, I o momento de inércia e θ a rotação da seção.

Fazendo o somatório das forças no sentido vertical, tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

Fazendo o somatório de momento, tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -Q + T \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + m_{IR} \quad (3)$$

Sabe-se que as relações constitutivas, a nível da seção, são

$$M = EI \frac{d\mathbf{q}}{dx} \text{ e } Q = GA \mathbf{g}_{xy} \quad (4)$$

onde \mathbf{g}_{xy} é a distorção por cisalhamento, E é o módulo de elasticidade longitudinal e G é o módulo de elasticidade transversal.

Manipulando algebricamente as equações (2), (3) e (4), tem-se

$$GA \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - GA \frac{\partial \mathbf{q}(x,t)}{\partial x} - m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$$EI \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x,t)}{\partial x^2} + GA \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - GA \mathbf{q}(x,t) - T \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Manipulando as equações (5) e (6), chega-se a

$$EI v^{(iv)}(x,t) - \frac{mEI}{GA} \frac{\partial^2 \ddot{v}(x,t)}{\partial x^2} + m \ddot{v}(x,t) - T v''(x,t) - \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 v''(x,t)}{\partial t^2} + \frac{m^2 v^{(iv)}(x,t)}{GA^2} = 0 \quad (7)$$

Aplicando-se o método da separação de variáveis, de tal modo que $v(x,t) = w(x)q(t)$ e assumindo-se, uma solução harmônica para a função $q(t)$, ou seja, $q(t) = \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f})$, com \mathbf{w} sendo a frequência circular, e \mathbf{f} o ângulo de fase.

$$EI \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) w^{(iv)}(x) + \frac{mEI \mathbf{w}^2 \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) w''(x)}{GA} - m \mathbf{w}^2 \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) w(x) - T \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) w''(x) + \frac{mI \mathbf{w}^2 \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) w''(x)}{A} + \frac{m^2 I \mathbf{w}^4 \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) w(x)}{GA^2} = 0 \quad (8)$$

Colocando-se, na Eq. (8), $\text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f})$ em evidência, dividindo-a por EI e desprezando-se a solução trivial $\text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) \neq 0$, tem-se

$$w^{(iv)}(x) + \left(\frac{m\mathbf{w}^2}{GA} + \frac{m\mathbf{w}^2}{EA} - \frac{T}{EI} \right) w''(x) + \left(\frac{m^2\mathbf{w}^4}{EGA^2} - \frac{m\mathbf{w}^2}{EI} \right) w(x) = 0 \quad (9)$$

Utilizando-se o operador $D = d/dt$ na Eq. (9), tem-se:

$$\left[D^4 + 0D^3 + \left(\frac{m\mathbf{w}^2}{GA} + \frac{m\mathbf{w}^2}{EA} - \frac{T}{EI} \right) D^2 + 0D + \left(\frac{m^2\mathbf{w}^4}{EGA^2} - \frac{m\mathbf{w}^2}{EI} \right) \right] w(x) = 0 \quad (10)$$

A Eq. (10) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\left[D^4 + 0D^3 + BD^2 + 0D + (-R) \right] w(x) = 0 \quad (11)$$

onde

$$B = \left(\frac{m\mathbf{w}^2}{GA} + \frac{m\mathbf{w}^2}{EA} - \frac{T}{EI} \right) \text{ e } R = \left(\frac{m\mathbf{w}^2}{EI} - \frac{m^2\mathbf{w}^4}{EGA^2} \right) \quad (12)$$

Comparando-se a Eq. (11) com um polinômio de 4º grau, onde seus coeficientes são combinações de suas raízes, tem-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ ab + ad + ac + bc + bd + cd = B \\ abc + bcd + acd + abd = 0 \\ abcd = -R \end{cases} \quad (13)$$

Resolvendo o sistema, chega-se as seguintes raízes

$$a = +\mathbf{d}, b = -\mathbf{d}, c = +i\mathbf{b}, d = -i\mathbf{b} \quad (14)$$

$$\text{onde } \mathbf{d} = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4R}}{2}} \text{ e } \mathbf{b} = \sqrt{\frac{B + \sqrt{B^2 + 4R}}{2}}.$$

É importante destacar que \mathbf{d} e \mathbf{b} são funções da frequência \mathbf{w} , já que B também é.

A solução geral para este caso é

$$v(x, t) = \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) [C_1 \cosh(\mathbf{d}x) + C_2 \sinh(\mathbf{d}x) + C_3 \cos(\mathbf{b}x) + C_4 \sin(\mathbf{b}x)] \quad (15)$$

$$\mathbf{q}(x,t) = \text{sen}(wt + \mathbf{f}) \left\{ \left[dC_1 \sinh(dx) + dC_2 \cosh(dx) - bC_3 \sin(bx) + bC_4 \cos(bx) \right] + \frac{m\mathbf{w}^2}{GA} \left[\frac{C_1}{d} \sinh(dx) + \frac{C_2}{d} \cosh(dx) + \frac{C_3}{b} \sin(bx) - \frac{C_4}{b} \cos(bx) \right] \right\} \quad (16)$$

As condições de contorno consideradas neste trabalho foram as mesmas utilizadas por Ervik (1986), e consideram que o cabo está engastado em uma extremidade e simplesmente apoiado na outra, conforme apresentado na Fig. 2.

- $v(0,t) = 0$, deslocamento zero para $x = 0$;
- $\mathbf{q}(0,t) = 0$, inclinação zero para $x = 0$;
- $v(L,t) = 0$, deslocamento zero para $x = L$;
- $\mathbf{q}'(L,t) = 0$, curvatura zero (momento nulo) para $x = L$.

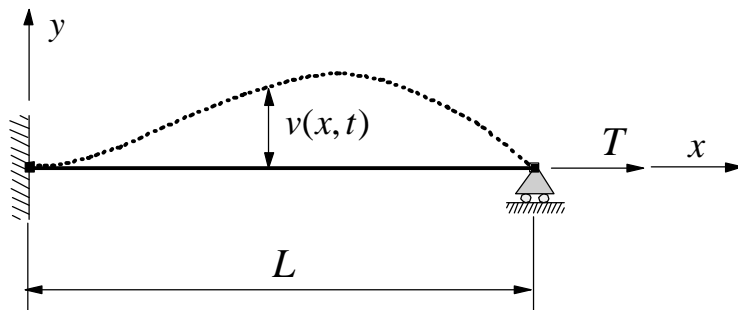


Figura 2 – condições de contorno.

A imposição das condições de contorno (Fig. 2) leva às seguintes relações

$$C_1 = \frac{C_4 d S}{b} \tanh(dL), C_2 = \frac{-C_4 d S}{b}, C_3 = \frac{-C_4 d S}{b} \tanh(dL) \quad (17)$$

e

$$\tan(bL) = \frac{dS}{b} \tanh(dL) \quad (18)$$

onde

$$S = \frac{(GAb^2 - m\mathbf{w}^2)}{(GA d^2 + m\mathbf{w}^2)} \quad (19)$$

Deve-se observar que a eq. (18), na verdade, consiste em uma equação não linear em \mathbf{w} , podendo ser reescrita na seguinte forma

$$F(\mathbf{w}) = \frac{b(\mathbf{w})}{d(\mathbf{w})S(\mathbf{w})} \tan(b(\mathbf{w})L) - \tanh(d(\mathbf{w})L) = 0 \quad (20)$$

Desta forma, as frequências naturais da estrutura podem ser determinadas obtendo-se as raízes da função $F(\mathbf{w})$.

Substituindo as eqs. (17), referente às imposições das condições de contorno, nas eqs. (15) e (16) chega-se a

$$v(x, t) = C_4 \sin(\omega t + f) \left\{ \sin(bx) - \frac{dS}{b} \left[\sinh(dx) + \tanh(dL) [\cos(bx) - \cosh(dx)] \right] \right\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} q(x, t) = C_4 \sin(\omega t + f) \left\{ \cos(bx) \left(\frac{GAb^2 - m\omega^2}{GAb} \right) - \frac{dS}{b} \left[\cosh(dx) \left(\frac{GAd^2 + m\omega^2}{GAd} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \tanh(dL) \left[\sin(bx) \left(\frac{GAb^2 - m\omega^2}{GAb} \right) + \sinh(dx) \left(\frac{GAd^2 + m\omega^2}{GAd} \right) \right] \right] \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

As Eqs. (15) à (22) também são válidas para a formulação que considera a rigidez geométrica, à flexão e ao cisalhamento, sendo necessário eliminar os termos $(m^2\omega^4)/(EGA^2)$ e $(m\omega^2)/(EA)$ referentes à inércia à rotação na Eq. (10).

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ACORDO COM A TEORIA DE VIGA DE BERNOULLI

A teoria de viga de Bernoulli é baseada na hipótese de que as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo de referência, após a deformação da estrutura.

Dentre as duas formulações feitas, considerando a teoria de viga de Bernoulli, a mais geral é a que considera a rigidez geométrica (efeito da força axial), a rigidez à flexão e a inércia à rotação. Nesta formulação a seguinte equação é verdadeira Neste trabalho, considera-se ainda na formulação referente a teoria de viga de Bernoulli, a a rigidez geométrica (efeito da força axial), a rigidez à flexão e a inércia à rotação. Nesta formulação a seguinte equação é verdadeira

$$\tan(q) \cong q = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (23)$$

Com isso, chega-se a uma equação diferencial parcial de quarta ordem

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - \frac{mI}{A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (24)$$

Em conformidade com a teoria de Bernoulli, são válidas as equações de (11) à (16), bastando para isso eliminar os termos referentes a rigidez ao cisalhamento em B e R , permanecendo portanto a mesma solução geral para o caso de Timoshenko. Desta forma, pela teoria de viga de Bernoulli, tem-se as seguintes condições de contorno (Fig. 2)

- $w(0) = 0$, deslocamento zero para $x = 0$;
- $w'(0) = 0$, inclinação zero para $x = 0$;
- $w(L) = 0$, deslocamento zero para $x = L$;
- $w''(L) = 0$, curvatura zero (momento nulo) para $x = L$.

Impondo-se as condições de contorno, tem-se

$$C_1 = \frac{C_4 b}{d} \tanh(dL), C_2 = \frac{-C_4 b}{d}, C_3 = \frac{-C_4 b}{d} \tanh(dL) \quad (25)$$

e

$$\tanh(\mathbf{d}L) = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{b}} \tan(\mathbf{b}L) \therefore F(\mathbf{w}) = \tanh(\mathbf{d}L) - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{b}} \tan(\mathbf{b}L) = 0 \quad (26)$$

onde $F(\mathbf{w})$ corresponde a uma função não linear, cujas raízes são as frequências naturais da estrutura.

Desta forma a solução para as condições de contorno para as formulações pertinentes a teoria de Bernoulli é

$$v(x,t) = C_4 \sin(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) \left\{ \sin(\mathbf{b}x) - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} \left[\sinh(\mathbf{d}x) + \tanh(\mathbf{d}L) [\cos(\mathbf{b}x) - \cosh(\mathbf{d}x)] \right] \right\} \quad (27)$$

4. ANÁLISE DE TODAS AS CONSIDERAÇÕES

As frequências naturais de todas as formulações são determinadas através das equações transcendentais implícitas (18), para teoria de viga de Timoshenko e (26), para a teoria de viga de Bernoulli. Para se resolver tais equações implementou-se o método numérico de Newton-Raphson no programa Mathcad.

A Tab. 1 e a Tab. 2 mostram todas as formulações referentes às teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko com todos os parâmetros necessários para a determinação de suas frequências naturais e a formulação que considera somente a rigidez geométrica.

Tabela 1 – Tabela representativa para a formulação da teoria de Bernoulli.

BERNOULLI			
	RIGIDEZ À FLEXÃO	RIGIDEZ À FLEXÃO E INÉRCIA À ROTAÇÃO	M. ERVIK
B	$B_F = -\frac{T}{EI}$	$B_{FR} = \left(\frac{m\mathbf{w}^2}{EA} - \frac{T}{EI} \right)$	$B_{ERVIK} = -\frac{T}{EI}$
R	$R_F = \frac{m\mathbf{w}^2}{EI}$	$R_{FR} = \frac{m\mathbf{w}^2}{EI}$	$R_{ERVIK} = \frac{m\mathbf{w}^2}{EI}$
S	-	-	-
$F(?)$	$F_F(\mathbf{w}) = \tanh(\mathbf{d}_F L) - \frac{\mathbf{d}_F}{\mathbf{b}_F} \tan(\mathbf{b}_F L)$	$F_{FR}(\mathbf{w}) = \tanh(\mathbf{d}_{FR} L) - \frac{\mathbf{d}_{FR}}{\mathbf{b}_{FR}} \tan(\mathbf{b}_{FR} L)$	$F_{ERVIK}(\mathbf{w}) = \sin(\mathbf{b}_{ERVIK} L)$

Exceto a função $F_G(\mathbf{w})$, que possui solução analítica, as demais funções $F_F(\mathbf{w})$, $F_{FR}(\mathbf{w})$, $F_{ERVIK}(\mathbf{w})$, $F_{FC}(\mathbf{w})$ e $F_{FCR}(\mathbf{w})$, que são funções transcendentais implícitas, tiveram solução obtida de forma numérica, utilizando-se o método de Newton-Raphson.

O gráfico da Fig. 4 mostra os resultados obtidos, onde as raízes de cada função são as frequências naturais, com as seguintes características do problema: $T = 20000$ N, $L = 200$ m, $E = 700$ Kgf/mm², $D = 25$ mm e $\rho_a = 2710$ Kgf/m³, sendo que a faixa de frequência analisada foi de 0 a 130 Hz (ou de 0 a 816.814 rad/s), o que corresponde do 1° até 281° modo de vibração.

Tabela 2 – Tabela representativa para a formulação da teoria de Timoshenko.

TIMOSHENKO			
	RIGIDEZ GEOMÉTRICA	RIGIDEZ À FLEXÃO E RIGIDEZ AO CISALHAMENTO	RIGIDEZ À FLEXÃO, RIGIDEZ AO CISALHAMENTO E INÉRCIA À ROTAÇÃO
B	-	$B_{FC} = \left(\frac{m\omega^2}{GA} - \frac{T}{EI} \right)$	$B_{FCR} = \left(\frac{m\omega^2}{GA} + \frac{m\omega^2}{EA} - \frac{T}{EI} \right)$
R	-	$R_{FC} = \frac{m\omega^2}{EI}$	$R_{FCR} = \left(\frac{m\omega^2}{EI} - \frac{m^2\omega^4}{EGA^2} \right)$
S	-	$S_{FC} = \frac{(GAb_{FC}^2 - m\omega^2)}{(GAd_{FC}^2 + m\omega^2)}$	$S_{FCR} = \frac{(GAb_{FCR}^2 - m\omega^2)}{(GAd_{FCR}^2 + m\omega^2)}$
$F(?)$	$F_G(\omega) = \text{sen} \left(\omega \sqrt{\frac{m}{T}} L \right)$	$F_{FC}(\omega) = \tanh(d_{FC}L) - \frac{b_{FC}}{d_{FC}S_{FC}} \tan(b_{FC}L)$	$F_{FCR}(\omega) = \tanh(d_{FCR}L) - \frac{b_{FCR}}{d_{FCR}S_{FCR}} \tan(b_{FCR}L)$

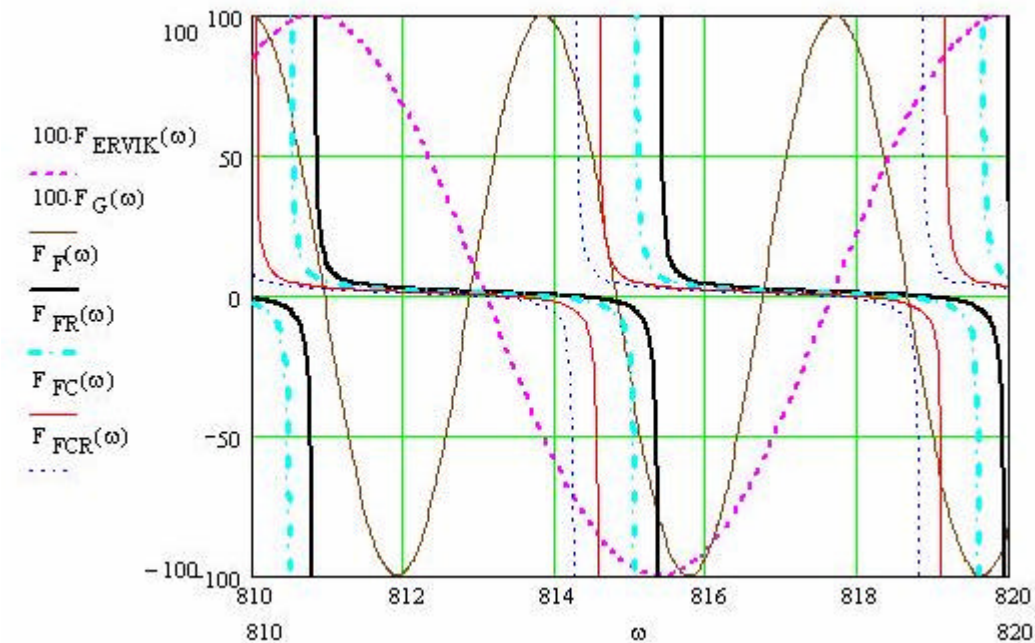


Figura 4 – Gráfico com todas funções analisadas

O método numérico de Newton-Raphson foi utilizado na determinação das frequências naturais do cabo, sendo desenvolvido e utilizado um programa na plataforma Mathcad, que fornece sistematicamente todas as frequências naturais do cabo. Utilizou-se como ponto inicial de iteração para a determinação de cada frequência natural o valor da última frequência natural, do último modo de vibração, acrescida do intervalo entre as duas últimas frequências naturais.

Para se avaliar melhor os dados obtidos, criou-se uma medida denominada de *Fator Modo*, que é dada pela seguinte fórmula

$$FatorModo = \frac{|Fx_n - F_{MP_n}|}{F_{MP_n} - F_{MP_{n-1}}} \quad (25)$$

onde Fx_n é o valor da frequência natural de uma das cinco formulações no n modo de vibração, F_{MP_n} é o valor da frequência natural da formulação mais precisa; a qual considera a rigidez geométrica, a rigidez à flexão, a rigidez ao cisalhamento e a inércia à rotação; no n modo de vibração e $F_{MP_{n-1}}$ é o valor da frequência natural da formulação mais precisa no modo anterior ao n modo de vibração.

Com este parâmetro pode se determinar a defasagem entre duas formulações diferentes e até o número de modos de vibração defasados entre as referidas formulações, pois se o *Fator Modo* for maior que 1 significa que as duas formulações estão defasadas por um modo de vibração, se for 2 significa uma defasagem de dois modos de vibração, e assim por diante. Além deste parâmetro avaliou-se o erro cometido entre as demais formulações em relação a, mais precisa, a qual considera a rigidez geométrica, a rigidez à flexão, a rigidez ao cisalhamento e a inércia à rotação ($F_{FCR}(\mathbf{w})$). Objetivando-se facilitar a visualização do gráfico da Fig. 5 (*Erro %*), omitiu-se a função $F_G(\mathbf{w})$, haja vista que seu erro em comparação com a função $F_{FCR}(\mathbf{w})$ é de aproximadamente 35% no 281° modo de vibração e a um *Fator Modo* de aproximadamente 60 (Fig. 6).

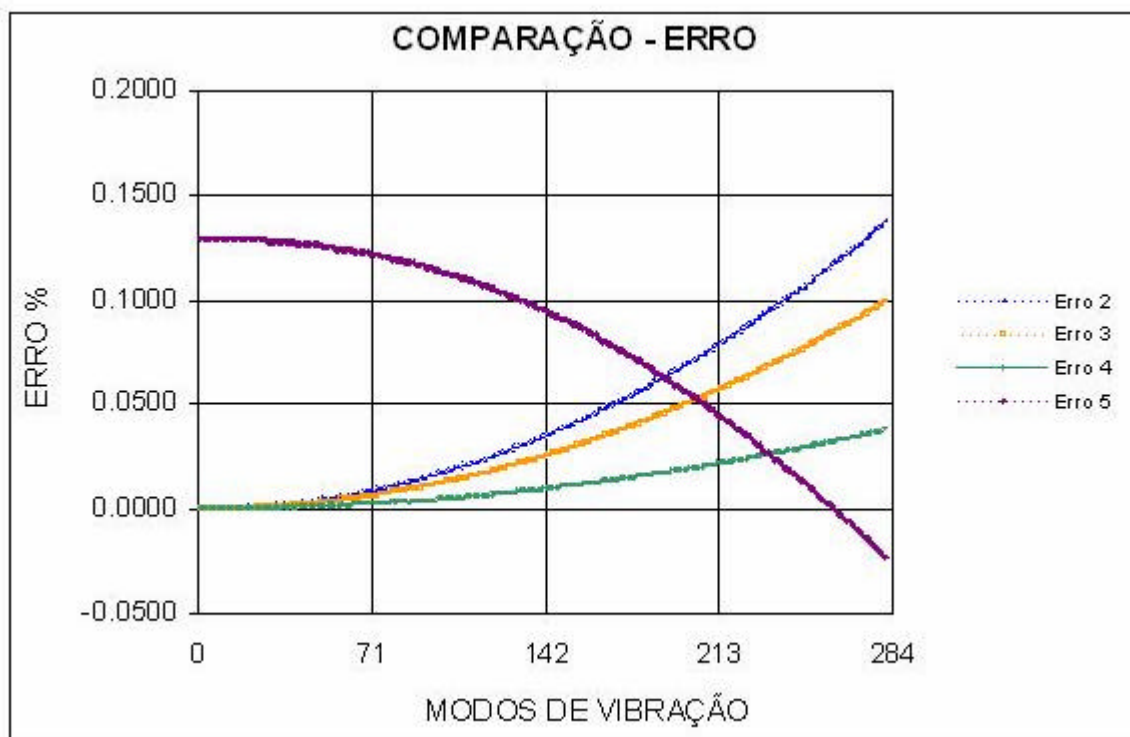


Figura 5 – Detalhe do *Erro* entre as funções $F_F(\mathbf{w})$, $F_{FR}(\mathbf{w})$, $F_{FC}(\mathbf{w})$, $F_{ERVIK}(\mathbf{w})$ e a função $F_{FCR}(\mathbf{w})$.

O gráfico da Fig. 5 revela que o parâmetro *Erro 5*, decresce de 0,13 % no 1° modo de vibração até passar pelo valor zero e aumenta (em valor absoluto) até aproximadamente 0,023% no 281° modo de vibração. O parâmetro *Erro 2* cresce até atingir um erro de 0,14 % no 281° modo de vibração, já o parâmetro *Erro 3* cresce até um erro de 0,1 % no 281° modo

de vibração, enquanto que o parâmetro *Erro 4* cresce até um erro de aproximadamente 0,038 % no 281° modo de vibração.

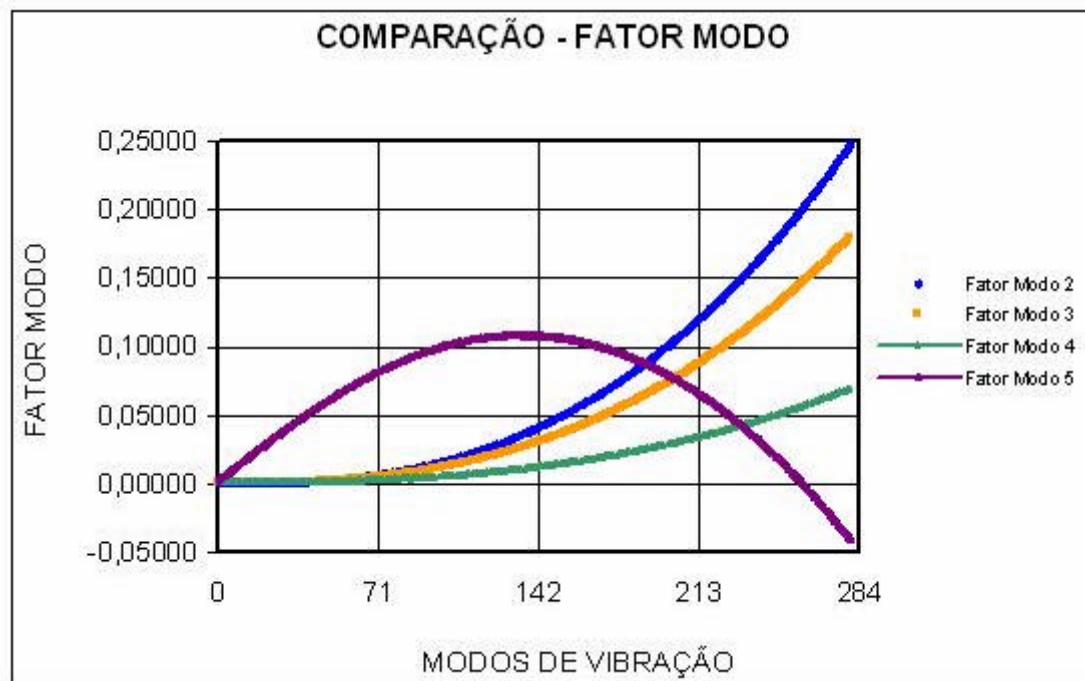


Figura 6 – Detalhe do *Fator Modo* entre as funções $F_F(\mathbf{w})$, $F_{FR}(\mathbf{w})$, $F_{FC}(\mathbf{w})$, $F_{ERVIK}(\mathbf{w})$ e a função $F_{FCR}(\mathbf{w})$.

O gráfico da Fig. 6 revela que o parâmetro *Fator Modo 5*, cresce até 0,11 no 134° modo de vibração, decrescendo até passar pelo valor zero e aumentando (em valor absoluto) até aproximadamente 0,041 no 281° modo de vibração. O parâmetro *Fator Modo 2* cresce até atingir 0,25 no 281° modo de vibração, já o parâmetro *Fator Modo 3* cresce até um valor de 0,178 no 281° modo de vibração, enquanto que o parâmetro *Fator Modo 4* cresce até um valor de aproximadamente 0,068 no 281° modo de vibração.

Como o parâmetro *Fator Modo* é a razão pela qual a diferença entre as frequências naturais de duas formulações, no mesmo modo de vibração, está para a diferença entre duas frequências naturais, da formulação que está se analisando, no respectivo modo e seu modo antecedente; conclui-se, através do gráfico da Fig. 6, que a diferença entre as frequências naturais aumenta para cada novo intervalo de modo de vibração, demonstrando que a formulação que mais se aproxima da mais precisa é, em ordem decrescente: a que considera a rigidez geométrica, a rigidez à flexão e a rigidez ao cisalhamento; a hipótese que considera a rigidez geométrica, a rigidez à flexão e a inércia à rotação e a hipótese que considera somente a rigidez geométrica e a rigidez à flexão.

5. CONCLUSÕES

Utilizou-se duas teorias de viga: a de Bernoulli e a de Timoshenko, sendo que nesta, é necessário se resolver um sistema de equações diferenciais parciais; e naquela, é necessário se resolver, apenas, uma equação diferencial parcial para se determinar os deslocamentos verticais e angulares do cabo em função do tempo e da posição de qualquer ponto do cabo. A equação da qual se obtém as frequências naturais do cabo para qualquer formulação, com exceção da que considera somente a rigidez geométrica, é transcendental, ou

seja, uma função implícita de funções trigonométricas, onde a solução analítica se torna inviável, justificando-se a utilização de métodos numéricos.

Partindo do princípio que a análise mais geral é aquela que considera todas as propriedades da seção, tem-se que a formulação mais completa feita é quando se considera na equação dinâmica de equilíbrio a rigidez geométrica, a rigidez à flexão, a rigidez ao cisalhamento e a inércia à rotação. De acordo com a faixa de frequência de 0 à 130 Hz, onde há o predomínio da vibração Eólica, observa-se que o fato de não se considerar a rigidez à flexão, a rigidez ao cisalhamento e a inércia à rotação na determinação das frequências naturais do cabo está se cometendo um erro de aproximadamente 35 %, posteriormente, viu-se que as considerações que mais se aproximam, em ordem decrescente, da formulação mais precisa são: quando se considera a rigidez geométrica, a rigidez à flexão e a rigidez ao cisalhamento; quando se considera a rigidez geométrica, a rigidez à flexão e a inércia à rotação; quando se considera a rigidez geométrica e a rigidez à flexão e quando se considera somente a rigidez geométrica. Porém quando se considera a aproximação feita por (Ervik et al., 1986), percebe-se que a mesma se distancia da formulação mais precisa até o 178° modo de vibração, onde decresce até atingir o valor zero no 263° modo de vibração, para tornar a crescer até 281° modo de vibração. Já em relação a solução numérica correspondente à aproximação feita por (Ervik et al., 1986), onde se considera somente a rigidez geométrica e a rigidez à flexão a diferença entre as duas formulações aumenta até 281° modo de vibração, chegando a uma diferença de aproximadamente 0,18 Hz.

Portanto, conclui-se que o erro de não se considerar a inércia à rotação ou a rigidez ao cisalhamento na equação de equilíbrio é muito pequeno, o que já não acontece caso quando não se considera a rigidez à flexão. Desta forma, a formulação menos precisa, que ocasiona erros muito pequenos, ocorre quando se considera somente a rigidez geométrica a rigidez à flexão; porém devido a implementação computacional que fornece diretamente as frequências naturais, fundamentadas em um desenvolvimento matemático preciso, não há razão de simplificações na determinação de tais frequências, para as condições de contorno impostas.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pela concessão da bolsa de Iniciação Científica do primeiro autor, a qual possibilitou a realização deste trabalho; à Prof. Regina Augusta Campos Sampaio e ao Eng. André Maués Brabo Pereira, pelo auxílio prestado na realização desta pesquisa.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aranha Júnior, G. Y. R. e De Souza, R.M. (a) “Elemento Finito de Barra para Análise Não-Linear Estática e Dinâmica Através da Formulação Co-rotacional”. XXXI, Jornadas Sud-Americanas de Ingenieria Estructural, Mendoza (Argentina), 2004.
- Bassalo, J.M.F. “Nascimentos da Física 3500 a.C. – 1900 a. D”. Editora da UFPA, 1996.
- Diana, G.; Cheli, F.; Fossati, F. e Manenti, A. “Aeolian Vibrations of Overhead Transmission Lines Computation in Turbulence Conditions”. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, v. 46 & 47, p.639-648, 1993.
- Ervik, M.; Berg, A.; Boelle, A.; Claren, R.F.; Dalle, B.; Edwards, A.T.; Estarellas, M.; Hard, A.R.; Havard, D.; Kvamgren, K.O.; Mackness, C.; Moecks, L.; Kounosu, K.; Rawlins, C.B.; Ruritz, R.; Shkaptsov, V.A.; Strub, H.; Thuillier, D. e Wijker, W.J. “Recommendations for the Evaluation of the Lifetime of Transmission Line Conductors”. Electra, N° 63, p.103-145, 1979.

- Ervik, M.; Berg, A.; Boelle, A.; Claren, R.F.; Dalle, B.; Edwards, A.T.; Estarellas, M.; Hard, A.R.; Havard, D.; Kvamgren, K.O.; Mackness, C.; Moecks, L.; Kounosu, K.; Rawlins, C.B.; Ruritz, R.; Shkaptsov, V.A.; Strub, H.; Thuillier, D. e Wijker, W.J. “Report on Aeolian Vibration”. *Electra*, Nº 124, p.410-77, 1986.
- Freire, D.G. “Vibrações Eólicas de Condutores Singelos em Linhas Aéreas de Transmissão”. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1997.
- Irvine, H.M. “Static’s of Suspended Cables”. *Journal of the Structural Division*, v.101, n. EM3, p.187-205, 1975.
- Jordan, R. “Vibrações em Linhas de Transmissão de Energia Elétrica”. VIII Cobem, 1985.
- Yojo, T. “Análise Não-Linear Geometricamente Exata de Pórticos Espaciais, Com Aplicação a Torres de Transmissão de Alta Tensão”. Tese de Doutorado. USP, 1993.
- Pereira, A.M.B., *Elementos Finitos de Barras Formulados pelos Métodos dos Deslocamentos e Forças para Análise Linear Estática e Dinâmica*. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Pará. 2002.